UNIWERSYTET KARDYNAŁA STEFANA WYSZYŃSKIEGO
WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
SZKOŁA NAUK ŚCISŁYCH

Egzamin z przedmiotu: BADANIA OPERACYJNE

21-11-2006

1 Zadania

Zadanie 1.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 1x_4$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +2x_4 & \leqslant & 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & -1x_3 & +2x_4 & \geqslant & 2 \\ 6x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -1x_4 & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\forall i\ x_i \geqslant 0$$

2 Test

Zadanie 2.1.
Dane jest następujące zagadnienie optymalizacyjne

$$\max f(x) = 2x_1 + x_2$$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rcr} |2x_1 - 6| & \leqslant & 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant & \alpha \end{array}$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Wykorzystując metodę graficzną rozwiązywania zagadnień programowania liniowego wyznacz rozwiązanie optymalne powyższego zagadnienia w zależności od parametru α.

Zadanie 2.2.
Zapisać pierwotne dla następującego zagadnienia dualnego

$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$
$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & \leqslant & -2 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \geqslant & 4 \\ & +2x_2 & -7x_3 & \geqslant & -5 \end{array}$$

Zadanie 2.3.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$$
$$b_1 = 4,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$$

Rozwiązania

Rozwiązanie zadania ??
Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{lllllllll} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +1x_5 & & & = & 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & -1x_3 & +2x_4 & & -1x_6 & & = & 2 \\ 6x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -1x_4 & & & +1x_7 & = & 4 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + wx_8$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{llllllllll} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +2x_4 & +1x_5 & & & & = & 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & -1x_3 & +2x_4 & & -1x_6 & & +1x_8 & = & 2 \\ 6x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -1x_4 & & & +1x_7 & & = & 4 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

Krok I Tablica początkowa metody sympleks

				-2	-3	4	-1	0	0	0	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_5	0	2	2	4	-2	2	1	0	0	0
2	P_8	w	2	$\boxed{4}$	2	-1	2	0	-1	0	1
3	P_7	0	4	6	2	2	-1	0	0	1	0
4	$z_j - c_j$		0	2	3	-4	1	0	0	0	0
5			2	4	2	-1	2	0	-1	0	0

Krok II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	-3	4	-1	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	1	0	$\boxed{3}$	$-\frac{3}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
2	P_1	-2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0
3	P_7	0	1	0	-1	$\frac{7}{2}$	-4	0	$\frac{3}{2}$	1
4	$z_j - c_j$		-1	0	2	$-\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Krok III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	-3	4	-1	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_2	-3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	P_1	-2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0
3	P_7	0	$\frac{4}{3}$	0	0	3	$-\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{5}{3}}$	1
4	$z_j - c_j$		$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

Krok IV Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	-3	4	-1	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_2	-3	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$
2	P_1	-2	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$
3	P_6	0	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$
4	$z_j - c_j$		$-\frac{9}{5}$	0	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$

STOP – Znaleziono rozwiązanie optymalne

Odpowiedź
Rozwiązaniem zadania jest punkt $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Natomiast optymalna wartość funkcji celu to $c^T\hat{x} = \frac{9}{5}$.

Rozwiązanie zadania ??
Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & \boxed{2}^{\,-\theta} & 1^{\,+\theta} & -1 & 0 \\ 3 & \boxed{2}^{\,+\theta} & \boxed{1}^{\,-\theta} & 0 & -1 \\ 1 & -2 & \boxed{2} & \boxed{2} & -1 \\ -2 & -2 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array} \qquad \theta = 1$$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & \boxed{1} & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 3 & \boxed{3} & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & \boxed{2} & \boxed{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}$$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź
Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 28$

Przykład 2.1.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 1$$

$$b_1 = 4,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$$

Rozwiązanie
Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & \boxed{2}\ ^{-\theta} & 1\ ^{+\theta} & -1 & 0 \\ 3 & \boxed{2}\ ^{+\theta} & \boxed{1}\ ^{-\theta} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \boxed{2} & \boxed{2} & -1 \\ -2 & -2 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array} \qquad \theta = 1$$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|cccc} {}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & \boxed{1} & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 3 & \boxed{3} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \boxed{2} & \boxed{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}$$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź
Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 28$