UNIWERSYTET KARDYNAŁA STEFANA WYSZYŃSKIEGO
WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
SZKOŁA NAUK ŚCISŁYCH

# Egzamin z przedmiotu: BADANIA OPERACYJNE

27-02-2007

## 1 Zadania

**Zadanie 1.1.**
Dla następującego zadania dualnego znajdź zadanie pierwotne. Znalezione zadanie pierwotne rozwiąż używając metody sympleks i zweryfikuj znalezione rozwiązanie przy użyciu metody graficznej.

$$\min_{w_i} z = -3w_1 + 24w_2 + 2w_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} -3w_1 & +6w_2 & +w_3 & \geqslant & 4 \\ w_1 & -4w_2 & +w_3 & \leqslant & -2 \end{array}$$
$$\forall i \; w_i \geqslant 0$$

## 2 Test

**Zadanie 2.1.**
Korzystając z metody graficznej określ, dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max f(x) = 4x_1 + \alpha x_2$$

przy ograniczeniach

$$\begin{array}{rrcl} -x_1 & +1x_2 & \leqslant & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & \geqslant & 6 \end{array}$$

$$x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2$$

**nie posiada** skończonego rozwiązania optymalnego.

**Zadanie 2.2.**
Dla następującego układu równań znaleźć jedno rozwiązanie bazowe dopuszczalne, jedno bazowe rozwiązanie niedopuszczalne i jedno zdegenerowane rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & = & 2 \\ -x_1 & +7x_2 & +6x_3 & -8x_4 & = & 4 \end{array}$$

**Zadanie 2.3.**
Pewna studentka ma do zdania 3 egzaminy w sesji w trzech terminach: zerowym, pierwszym i drugim. W każdym z tych terminów może ona zdać jeden, dwa lub trzy egzaminy, bądź nie podchodzić do żadnego z nich (nie tracąc wtedy czasu na naukę).

- Ponieważ nauka do terminu zerowego jest przeplatana zajęciami, aby zdać wszystkie trzy egzaminy w tym terminie, studentka potrzebuje 18 dni nauki. Aby zdać dwa egzaminy — 10 dni nauki, aby zdać tylko jeden wystarczą 3 dni nauki.
- Podczas nauki do terminu pierwszego nie ma już zajęć, więc aby zdać trzy egzaminy studentka potrzebuje 15 dni nauki, do zdania dwóch już tylko 6 dni, a aby zdać jeden wystarczą 2 dni.
- W sesji poprawkowej (termin drugi) studentka będzie rozleniwiona i nauka do każdego z egzaminów pochłonie jej aż 7 dni (a więc aby zdać jeden, dwa lub trzy egzaminy będzie potrzebować odpowiednio 7, 14 i 21 dni nauki).

Ile egzaminów w każdym z terminów powinna zdać studentka, aby jak najmniej czasu poświęcić na naukę i zdać wszystkie egzaminy? Odpowiedź znajdź przy pomocy algorytmu programowania dynamicznego.

## 3 Rozwiązania

Rozwiązanie zadania 1

**Rozwiązanie**
Zadanie po przekształceniu do zadania dualnego jest następujące

$$\max_{x_i} z = 4x_1 + 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +1x_2 & \geqslant & 3 \\ 6x_1 & +4x_2 & \leqslant & 24 \\ 1x_1 & -1x_2 & \leqslant & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -4x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & & = & 3 \\ 6x_1 & +4x_2 & & +1x_4 & & = & 24 \\ 1x_1 & -1x_2 & & & +1x_5 & = & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -4x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + wx_6$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} 3x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & & +1x_6 & = & 3 \\ 6x_1 & +4x_2 & & +1x_4 & & & = & 24 \\ 1x_1 & -1x_2 & & & +1x_5 & & = & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

KROK I Tablica początkowa metody sympleks

| | | | | $-4$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | BAZA | $c$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| 1 | $P_6$ | $w$ | 3 | $\boxed{3}$ | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 1 |
| 2 | $P_4$ | 0 | 24 | 6 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | $P_5$ | 0 | 2 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | $z_j - c_j$ | | 0 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | | | 3 | 3 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 0 |

KROK II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

| | | | | $-4$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | BAZA | $c$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
| 1 | $P_1$ | $-4$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |
| 2 | $P_4$ | 0 | 18 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | $P_5$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{4}{3}$ | $\boxed{\frac{1}{3}}$ | 0 | 1 |
| 4 | $z_j - c_j$ | | $-4$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 0 | 0 |

Krok III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

| | | | | $-4$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | Baza | $c$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
| 1 | $P_1$ | $-4$ | $2$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $1$ |
| 2 | $P_4$ | $0$ | $12$ | $0$ | $\boxed{10}$ | $0$ | $1$ | $-6$ |
| 3 | $P_3$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-4$ | $1$ | $0$ | $3$ |
| 4 | $z_j - c_j$ | | $-8$ | $0$ | $6$ | $0$ | $0$ | $-4$ |

Krok IV Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

| | | | | $-4$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | Baza | $c$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
| 1 | $P_1$ | $-4$ | $\frac{16}{5}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{5}$ |
| 2 | $P_2$ | $-2$ | $\frac{6}{5}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{3}{5}$ |
| 3 | $P_3$ | $0$ | $\frac{39}{5}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 4 | $z_j - c_j$ | | $-\frac{76}{5}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ |

STOP – Znaleziono rozwiązanie optymalne

**Odpowiedź**

Rozwiązaniem zadania jest punkt $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}^T$. Natomiast optymalna wartość funkcji celu to $c^T\hat{x} = \frac{76}{5}$.