Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Szkoła Nauk Ścisłych

Egzamin z przedmiotu: Badania Operacyjne

13-03-2007

1 Zadania

Zadanie 1.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 8x_1 - 3x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 5x_1 & -2x_2 & \leqslant & 20 \\ 2x_1 & +1x_2 & \geqslant & 3 \\ 1x_1 & & \leqslant & 6 \\ & +1x_2 & \leqslant & 6 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Zadanie 1.2.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$a_1 = 3, \; a_2 = 4, \; a_3 = 6$$
$$b_1 = 4, \; b_2 = 4, \; b_3 = 3, \; b_4 = 1, \; b_5 = 1$$

2 Test

Zadanie 2.1.
Wyznacz rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego w zależności od parametru $\alpha > 0$,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\alpha} x_1 + 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +3x_2 & \leqslant & 12 \\ 2x_1 & -x_2 & \leqslant & 2 \end{array}$$

Zadanie 2.2.
Zapisać zagadnienie pierwotne dla następującego zagadnienia dualnego

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3} 2x_1 - 1x_2 - 4x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & & +1x_3 & \leqslant & 2 \\ 9x_1 & +2x_2 & -7x_3 & \geqslant & 1 \\ & -8x_2 & -5x_3 & \geqslant & 3 \end{array}$$
$$\forall i \quad x_i \geqslant 0$$

3 Rozwiązania

Rozwiązanie
Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -8x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{llllllll}
5x_1 & -2x_2 & +1x_3 & & & & = & 20 \\
2x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & & = & 3 \\
1x_1 & & & & +1x_5 & & = & 6 \\
 & +1x_2 & & & & +1x_6 & = & 6
\end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -8x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + wx_7$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{lllllllll}
5x_1 & -2x_2 & +1x_3 & & & & & = & 20 \\
2x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & & +1x_7 & = & 3 \\
1x_1 & & & & +1x_5 & & & = & 6 \\
 & +1x_2 & & & & +1x_6 & & = & 6
\end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

Krok I Tablica początkowa metody sympleks

				-8	3	0	0	0	0	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	20	5	-2	1	0	0	0	0
2	P_7	w	3	$\boxed{2}$	1	0	-1	0	0	1
3	P_5	0	6	1	0	0	0	1	0	0
4	P_6	0	6	0	1	0	0	0	1	0
5	$z_j - c_j$		0	8	-3	0	0	0	0	0
6			3	2	1	0	-1	0	0	0

Krok II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-8	3	0	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	$\frac{25}{2}$	0	$-\frac{9}{2}$	1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0
2	P_1	-8	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
3	P_5	0	$\frac{9}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0
4	P_6	0	6	0	1	0	0	0	1
5	$z_j - c_j$		-12	0	-7	0	4	0	0

Krok III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-8	3	0	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	5	0	$-\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	0
2	P_1	-8	4	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0
3	P_5	0	2	0	$\boxed{\frac{2}{5}}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0
4	P_6	0	6	0	1	0	0	0	1
5	$z_j - c_j$		-32	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	0

Krok IV Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-8	3	0	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	14	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{2}$	0
2	P_1	-8	6	1	0	0	0	1	0
3	P_2	3	5	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0
4	P_6	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1
5	$z_j - c_j$		-33	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

STOP – Znaleziono rozwiązanie optymalne

Odpowiedź

Rozwiązaniem zadania jest punkt $\hat{x} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}^T$. Natomiast optymalna wartość funkcji celu to $c^T\hat{x} = 33$.

Rozwiązanie

Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

3	0	0	0	0	3
1	3	0	0	0	4
0	1	3	1	1	6
4	4	3	1	1	

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	4	0	-3
6	$\boxed{3}\ ^{-\theta}$	4	$7\ ^{+\theta}$	5	3
2	$\boxed{1}\ ^{+\theta}$	$\boxed{3}\ ^{-\theta}$	3	1	-1
3	-2	$\boxed{1}\ ^{+\theta}$	$\boxed{3}\ ^{-\theta}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

$\theta = 3$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	-3	0	-3
6	$\boxed{0}\ ^{-\theta}$	4	$\boxed{3}$	$5\ ^{+\theta}$	3
2	$\boxed{4}\ ^{+\theta}$	$\boxed{0}\ ^{-\theta}$	-4	1	-1
3	-2	$\boxed{4}\ ^{+\theta}$	-7	$\boxed{1}\ ^{-\theta}$	$\boxed{1}$

$\theta = 0$

Krok III Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	2	0	-3
1	-5	-1	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	-2
2	$\boxed{4}$	$\boxed{0}\ ^{-\theta}$	1	$1\ ^{+\theta}$	-1
3	-2	$\boxed{4}\ ^{+\theta}$	-2	$\boxed{1}\ ^{-\theta}$	$\boxed{1}$

$\theta = 0$

Krok IV Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	-1	1	-1	-4
2	-4	-1	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	-2
2	$\boxed{4}$	-1	0	$\boxed{0}$	-2
4	-1	$\boxed{4}$	-2	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź

Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 32$

Rozwiązanie

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3} \; -2x_1 + 1x_2 + 3x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +9x_2 & & \leqslant & -2 \\ 0x_1 & +2x_2 & -8x_3 & \leqslant & 1 \\ -1x_1 & -7x_2 & -5x_3 & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\forall i \quad x_i \geqslant 0$$