BADANIA OPERACYJNE

KOLOKWIUM

22-11-2006

Zadania

Należy rozwiązać podane niżej zadania. Rozwiązania powinny być poparte uzasadnieniem (albo algorytmicznym albo słownym). Podanie samego rozwiązania (albo odpowiedzi np „tak" lub „nie") nie będzie punktowane. Wszystkie zadania powinny być rozwiązane w sposób SCHLUDNY i przejrzysty i kończyć się odpowiedzią.

Zadanie 1 (20 pkt.)

Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8$$

$$b_1 = 4,\ b_2 = 6,\ b_3 = 4,\ b_4 = 4$$

Zadanie 2 (30 pkt.)

Dane jest następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = -2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 8x_4$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrcr} -1x_1 & -4x_2 & -8x_3 & +1x_4 & \leqslant & -3 \\ 2x_1 & -1x_2 & +4x_3 & -5x_4 & \geqslant & 4 \end{array}$$

$$\forall i\ x_i \geqslant 0$$

- Zapisać zagadnienie dualne do danego (3 pkt.),
- Rozwiązać zagadnienie dualne metodą sympleks (20 pkt.),
- Rozwiązać zagadnienie dualne metodą graficzną (2 pkt.),
- Załóżmy, że zmodyfikujemy prawe strony ograniczeń zadania pierwotnego następująco

$$\begin{array}{rrrrcr} -1x_1 & -4x_2 & -8x_3 & +1x_4 & \leqslant & -\alpha \\ 2x_1 & -1x_2 & +4x_3 & -5x_4 & \geqslant & \beta \end{array}$$

  gdzie $\alpha, \beta > 0$. Dla jakich α oraz β zadanie dualne będzie miało nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych? (5 pkt.)

Rozwiązania

Rozwiązanie zadania 1
Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

4	2	0	0	6
0	4	0	0	4
0	0	4	4	8
4	6	4	4	

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	-1	2
6	$\boxed{4}^{-\theta}$	$\boxed{2}^{+\theta}$	2	3
3	1	$\boxed{4}$	-4	-1
7	$3^{+\theta}$	$\boxed{0}^{-\theta}$	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$

$\theta = 0$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	2	5
6	$\boxed{4}^{-\theta}$	$\boxed{2}$	5	$6^{+\theta}$
3	1	$\boxed{4}$	-1	2
4	$\boxed{0}^{+\theta}$	-3	$\boxed{4}$	$\boxed{4}^{-\theta}$

$\theta = 4$

Krok III Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	0	2	-1
6	$\boxed{0}^{-\theta}$	$\boxed{2}$	$5^{+\theta}$	$\boxed{4}$
3	1	$\boxed{4}$	-1	-4
4	$\boxed{4}^{+\theta}$	-3	$\boxed{4}^{-\theta}$	-6

$\theta = 0$

Krok IV Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	5	2	4
1	-5	$\boxed{2}^{-\theta}$	$\boxed{0}^{+\theta}$	$\boxed{4}$
-2	-4	$\boxed{4}$	-6	-4
4	$\boxed{4}$	$2^{+\theta}$	$\boxed{4}^{-\theta}$	-1

$\theta = 2$

Krok V Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	3	2	4
1	-5	-2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$
0	-2	$\boxed{4}$	-4	-2
4	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	-1

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź
Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 80$

Rozwiązanie zadania 2
Zadanie dualne ma postać

$$\min_{x_i} z = -3x_1 - 4x_2$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{rrcr}
-1x_1 & -2x_2 & \geqslant & -2 \\
-4x_1 & +1x_2 & \geqslant & 4 \\
-8x_1 & -4x_2 & \geqslant & -8 \\
1x_1 & +5x_2 & \geqslant & 8
\end{array}
$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -3x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
1x_1 & +2x_2 & +1x_3 & & & & = & 2 \\
-4x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & & = & 4 \\
8x_1 & +4x_2 & & & +1x_5 & & = & 8 \\
1x_1 & +5x_2 & & & & -1x_6 & = & 8
\end{array}
$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -3x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + wx_7 + wx_8$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrcr}
1x_1 & +2x_2 & +1x_3 & & & & & & = & 2 \\
-4x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & & +1x_7 & & = & 4 \\
8x_1 & +4x_2 & & & +1x_5 & & & & = & 8 \\
1x_1 & +5x_2 & & & & -1x_6 & & +1x_8 & = & 8
\end{array}
$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

Krok I Tablica początkowa metody sympleks

				-3	-4	0	0	0	0	w	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	2	1	$\boxed{2}$	1	0	0	0	0	0
2	P_7	w	4	-4	1	0	-1	0	0	1	0
3	P_5	0	8	8	4	0	0	1	0	0	0
4	P_8	w	8	1	5	0	0	0	-1	0	1
5	$z_j - c_j$		0	3	4	0	0	0	0	0	0
6			12	-3	6	0	-1	0	-1	0	0

Krok II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-3	-4	0	0	0	0	w	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_2	-4	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
2	P_7	w	3	$-\frac{9}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	1	0
3	P_5	0	4	6	0	-2	0	1	0	0	0
4	P_8	w	3	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	-1	0	1
5	$z_j - c_j$		-4	1	0	-2	0	0	0	0	0
6			6	-6	0	-3	-1	0	-1	0	0

STOP – Zadanie jest sprzeczne, ponieważ w rozwiązaniu optymalnym w bazie występują zmienne sztucznej bazy