Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

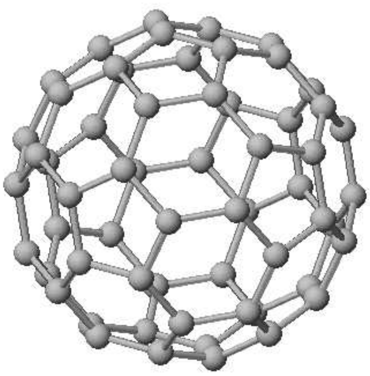
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Szkoła Nauk Ścisłych

Piotr Kaczyński

Badania Operacyjne

Notatki do ćwiczeń



wersja 0.5 Warszawa, 17 stycznia 2007

Spis treści

Słowo wstępu

Poniższy skrypt jest luźnym zapisem notatek do ćwiczeń i przeznaczony jest dla studentów Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego jako uzupełnienie i przypomnienie materiału przerabianego na ćwiczeniach do przedmiotu *Badania Operacyjne*. Skrypt ten powstał jako wynik rozszerzenia notatek, według których prowadzone są ćwiczenia. W szczególności dodane zostały krótkie komentarze do najważniejszych twierdzeń i definicji oraz opisane zostały dokładnie przykłady prezentowane na ćwiczeniach (w celu możliwości ich dokładnego przeanalizowania w domu przez studentów obecnych i zapoznania się z materiałem przez studentów nieobecnych na danych ćwiczeniach). Dodatkowo dodane zostały zadania do samodzielnego rozwiązania przed kolokwiami i egzaminem.

Skrypt ten jest w trakcie rozwoju i niektóre ćwiczenia nie są jeszcze wogóle zapisane, a niektóre są ale w wersji nierozszerzonej. Odpowiednie ćwiczenia, które nie są jeszcze ukończone zostały odpowiednio oznaczone przypisem w stopce. Należy zwracać uwagę na wersję skryptu podane po lewej stronie stopki oraz datę tworzenia dokumentu. Zmiana wersji oznaczać będzie znaczne uzupełnienie treści skryptu, natomiast inna data najczęściej oznaczać będzie małe poprawki w skrypcie (literówki etc.). Będę starał się sukcesywnie uzupełniać skrypt o kolejne ćwiczenia.

Wszelkie uwagi, co do treści i jasności przedstawionych treści są mile widziane - proszę je przesyłać na adres mailowy pkaczynski@uksw.edu.pl.

Uwaga! Osoby, które zgłoszą (poważne) błędy w treści (na przykład błędny wzór etc.) mogą uzyskać „plusa” przyznawanego za odpowiedź przy tablicy. Dodatkowo, jeśli dana osoba rozwiąże wszystkie zadania do samodzielnego rozwiązania z wybranych ćwiczeń i owe rozwiązania spisze w LaTeX-u, to również może zarobić „plusa”.

Ćwiczenia 1

Programowanie liniowe, zagadnienia wstępne

Programowanie liniowe jest to metoda znajdowania rozwiązania liniowych zagadnień optymalizacyjnych (szukania minimów lub maksimów pewnych funkcji liniowych przy liniowych ograniczeniach).

1.1 Możliwe rozwiązania zadania programowania liniowego

Dla zagadnień programowania liniowego może zajść jeden z następujących przypadków

- Zadanie posiada **unikalne skończone rozwiązanie optymalne** - rozwiązanie zadania jest jedyne i jest wektorem (punktem) o skończonych współczynnikach i spełnia wszystkie ograniczenia zadania,
- Zadanie posiada **nieograniczone rozwiązanie optymalne** - rozwiązanie zadania jest nieskończone co do wartości; dla każdego rozwiązania spełniającego ograniczenia można zawsze znaleźć inne, lepsze rozwiązanie również spełniające ograniczenia,
- **Zadanie jest sprzeczne** - nie istnieją wektory spełniające ograniczenia; zadanie nie ma rozwiązania i jest prawdopodobnie źle postawione
- Zadanie posiada **nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych** - istnieje nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych, dla których funkcja celu przyjmuje tą samą wartość.

Inny przypadek dla zadań programowania liniowego nie może zajść.

1.2 Przykład zagadnienia programowania liniowego

Rozważmy następujące, przykładowe zagadnienie optymalizacyjne z ograniczeniami (znajdowania punktu, który minimalizuje, bądź maksymalizuje pewną funkcję celu przy zadanych ograniczeniach).

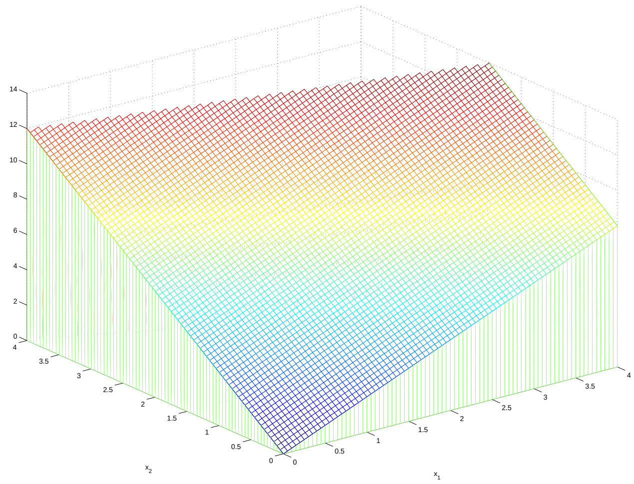
Przykład 1.2.1.

$$\max_{x\in\mathbb{R}^2} z = 2x_1 + 3x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +2x_2 & \leqslant & 14 \\ x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ 4x_1 & & \leqslant & 16 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$



Rysunek 1.1: Wykres funkcji celu dla przykładu 1.2.1

Funkcję z w powyższym zagadnieniu nazywamy **funkcją celu**. Wykres funkcji celu przy nałożonych ograniczeniach znajduje się na rysunku 1.1 Problem rozwiązania Zagadnienia Programowania Liniowego polega na znalezieniu znalezieniu punktu maksymalizującego funkcję celu, czyli najwyższego na prezentowanym wykresie. W przypadku dwuwymiarowym jest to zadanie proste, w przypadku większej ilości wymiarów ($x \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3$) zadanie staje się bardziej skomplikowane i niemożliwe do narysowania w standardowej przestrzeni kartezjańskiej.

1.3 Zbiór rozwiązań dopuszczalnych - definicje

Definicja 1.1. ***Rozwiązaniem dopuszczalnym*** *zagadnienia programowania liniowego nazywamy każdy wektor x spełniający ograniczenia zagadnienia programowania liniowego.*

Definicja 1.2. *Zbiór wszystkich wektorów dopuszczalnych nazywamy* ***zbiorem rozwiązań dopuszczalnych*** *zagadnienia programowania liiowego.*

Przykład 1.3.1.
Narysować zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 1.2.1.

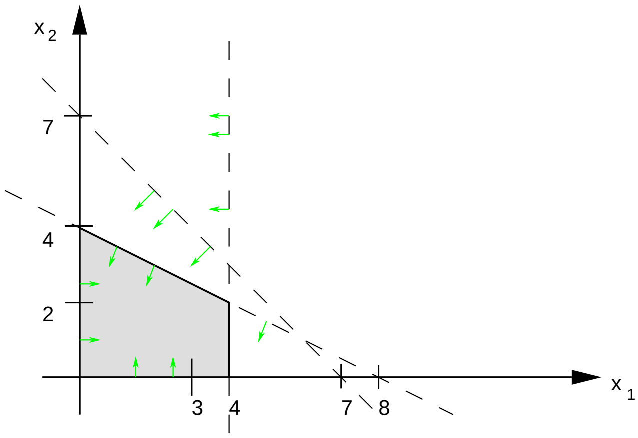
Rozwiązanie
Zbiór rozwiązań dopuszczalnych przedstawiony został na rysunku 1.2

1.4 Metoda graficzna rozwiązywania zagadnienia programowania liniowego

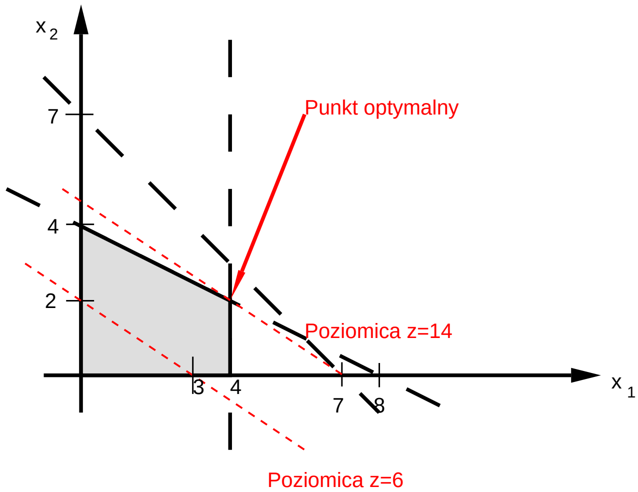
Metoda graficzna polega na znalezieniu rozwiązania zagadnienia poprzez narysowanie obszaru spełniającego nierówności i jednej z poziomic funkcji celu. Następnie przesuwamy tą poziomicę tak, by wartości funkcji celu rosły, a jednocześnie poziomica ta przecinała się z obszarem spełniającym ograniczenia, aż dojdzie do sytuacji, w której poziomica ta przecina obszar tylko w jednym punkcie - jest to rozwiązanie optymalne.

Przykład 1.4.1.
Rozwiązać za pomocą metody graficznej Zadanie Programowania Liniowego dane w przykładzie 1.2.1.

Rozwiązanie
Rozwiązanie tą metodą naszkicowano na rysunku 1.3 Na rysunku uwidoczniono dwie poziomice funkcji celu



Rysunek 1.2: Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (rozwiązanie) dla przykładu 1.3.1



Rysunek 1.3: Rozwiązanie metodą graficzną przykładu 1.4.1

(dla wartości 6 oraz 14). Widać, że poziomica $z = 14$ ma dokładnie jeden punkt przecięcia z obszarem rozwiązań dopuszczalnych, a więc punkt ten jest punktem optymalnym. Rozwiązaniem zagadnieina jest więc punkt

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.4.2.
Rozwiązać przy użyciu metody graficznej następujące zagadnienie programowania liniowego

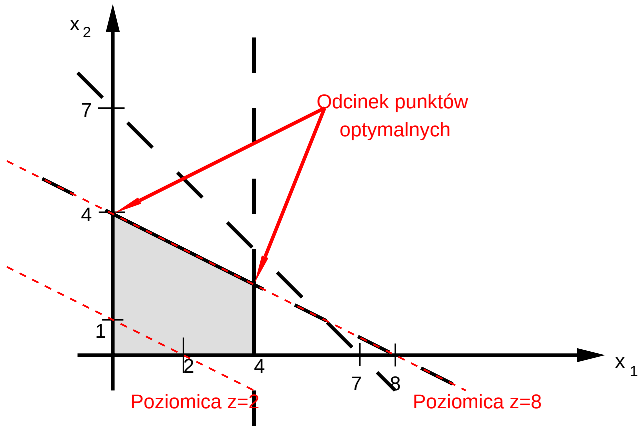
$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} z = x_1 + 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +2x_2 & \leqslant & 14 \\ x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ 4x_1 & & \leqslant & 16 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Zadanie powyższe jest identyczne z przykładem 1.4.1, zmieniona została jedynie funkcja celu. Rozwiązanie metodą graficzną zostało naszkicowane na rysunku 1.4. Z rysunku widać, że cały odcinek łączący punkty $(0; 4)$ oraz $(4; 2)$ zawiera rozwiązania optymalne (poziomice funkcji celu są równoległe do jednego z ograniczeń).



Rysunek 1.4: Rozwiązanie metodą graficzną przykładu 1.4.2

1.5 Postać standardowa Zagadnienia Programowania Liniowego

W celu ustandaryzowania sposobu rozwiązywania zagadnień programowania liniowego wprowadza się tzw. postać standardową do której można sprowadzić każde zagadnienie programowania liniowego.

$$\min z = c^T x \tag{1.1}$$

przy ograniczeniach

$$Ax = b \tag{1.2}$$
$$x_i \geqslant 0 \tag{1.3}$$

gdzie A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach. Istotne jest założenie o nieujemności zmiennych.

1.6 Sprowadzanie dowolnego ZPL do postaci standardowej

Następujące przypadki można sprowadzić do postaci standardowej

- Maksymalizacja, zamiast minimalizacji funkcji celu
  Rozwiązanie: Minimalizacja funkcji celu pomnożonej przez -1

  $$\min_x f(x) = \max_x \; -f(x)$$

  Przykład

  $$\min_x \; -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \quad \longmapsto \quad \max_x \; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4$$

- Funkcja afiniczna jako funkcja celu ($f(x) = c^T x + c_0, \; c_0 \in \mathbb{R}$)
  Rozwiązanie: Wartość c_0 można pominąć i uwzględnić ją dopiero przy podawaniu optymalnej wartości funkcji celu.

  Przykład

  $$\min_x \; -2x_1 + 3x_2 - 17 \quad \longmapsto \quad \min_x \; -2x_1 + 3x_2$$

- Nierówność $\geqslant$ w ograniczeniach
  Rozwiązanie: **Odjęcie** nieujemnej zmiennej dopełniającej w tej nierówności i przekształcenie do równości

  Przykład

  $$-7x_1 + 4x_2 \geqslant 2 \quad \longmapsto \quad -7x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \; x_3 \geqslant 0$$

- Nierówność $\leqslant$ w ograniczeniach
  ROZWIĄZANIE: **Dodanie** nieujemnej zmiennej dopełniającej w tej nierówności i przekształcenie do równości

  Przykład
  $$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 2 \quad \longmapsto \quad 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2,\ x_4 \geqslant 0$$

- Niektóre zmienne dowolnego znaku (niekoniecznie $x_i \geqslant 0$)
  ROZWIĄZANIE: Zastąpienie zmiennych o dowolnym znaku różnicą zmiennych dodatnich
  $$x_i = x_i' - x_i'', \quad x_i', x_i'' \in \mathbb{R}_+,\ x_i \in \mathbb{R}$$

1.7 Rozwiązania bazowe

Definicja 1.3. ***Rozwiązaniem bazowym*** *układu równań* (1.2) *nazywamy rozwiązanie powstałe poprzez przyrównanie $n - m$ zmiennych do zera, przy założeniu, że wyznacznik współczynników tych m zmiennych jest niezerowy. Te m pozostałych zmiennych nazywamy* ***bazowymi.***

Definicja 1.4. ***Bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym*** *nazywamy rozwiązanie bazowe, którego wszystkie zmienne są nieujemne.*

Definicja 1.5. ***Zdegenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym*** *nazywamy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, w którym choć jedna zmienna bazowa jest równa 0.*

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest odpowiednikiem wierzchołka obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

Twierdzenie 1.1. *Funkcja celu standardowego zagadnienia programowania liniowego przyjmuje wartość minimalną w punkcie wierzchołkowym zbioru rozwiązań dopuszczalnych.*

Przykład 1.7.1.
Znaleźć wszystkie rozwiązania bazowe dopuszczalne dla przykładu 1.2.1

Rozwiązanie
Aby znaleźć te rozwiązania należy najpierw przekształcić ograniczenia do postaci standardowej (równościowej). Otrzymujemy
$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 14 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ 4x_1 & & & & x_5 & = & 16 \end{array}$$

Ponieważ mamy $m = 3$ ograniczenia oraz $n = 5$ zmiennych, to aby znaleźć dane rozwiązanie bazowe należy przyrównać $n - m = 2$ zmienne do zera. Aby znaleźć wszystkie rozwiązania bazowe, należy więc przyrównać każdą możliwą parę zmiennych do 0 i rozwiązać powstały układ równań.

Przykładowo przyrównajmy do 0 zmienne x_4 oraz x_5. Otrzymujemy następujący układ równań
$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 14 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 8 \\ 4x_1 & & & = & 16 \end{array}$$

którego rozwiązaniem jest
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy więc **dopuszczalne** rozwiązanie bazowe (wszystkie $x_i \geqslant 0$).
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jak widać powyższe rozwiązanie bazowe (jeśli rozpatrzymy jedynie x_1 oraz x_2) jest jednym z punktów leżących na wierzchołku rozwiązań dopuszczalnych na rysunku 1.2.

Przyrównajmy teraz x_3 oraz x_5 do zera. Otrzymamy następujący układ równań

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & & = & 14 \\ x_1 & +2x_2 & +x_4 & = & 8 \\ 4x_1 & & & = & 16 \end{array}$$

którego rozwiązaniem jest $[x_1\ x_2\ x_4]^T = [4\ 3\ \ -2]^T$. Otrzymaliśmy więc kolejne rozwiązanie bazowe

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Powyższe rozwiązanie bazowe jest **niedopuszczalne**, ponieważ nie wszystkie $x_i \geqslant 0$. Ponownie warto zauważyć, gdzie to rozwiązanie znajduje się na rysunku 1.2.

Analogicznie można znaleźć pozostałe rozwiązania bazowe (przyrównując pozostałe możliwe pary zmiennych do 0, do wykonania jako ćwiczenie).

Przykład 1.7.2.
Znaleźć jedno dopuszczalne rozwiązanie bazowe, jedno niedopuszczalne rozwiązanie bazowe i jedno zdegenerowane rozwiązanie bazowe następującego układu ograniczeń równościowych

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 12 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ 4x_1 & & & & x_5 & = & 16 \end{array}$$

Rozwiązanie
Ponownie przyrównujemy wybraną parę zmiennych do zera aby uzyskać odpowiednie rozwiązanie bazowe (najprostszym sposobem znalezienia poszczególnych rozwiązań jest przyrównywanie kolejnych par zmiennych do zera, aż trafimy na odpowiednie).

Załóżmy najpierw $x_4 = x_5 = 0$; otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 12 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 8 \\ 4x_1 & & & = & 16 \end{array}$$

którego rozwiązaniem jest $[x_1\ x_2\ x_3]^T = [4\ 2\ 0]^T$. Otrzymaliśmy więc **zdegenerowane dopuszczalne rozwiązanie bazowe** postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższe jest zdegenerowane, ponieważ mimo tego, że specjalnie nie przyrównywaliśmy zmiennej x_3 do 0, to i tak w rozwiązaniu przyjmuje ona wartość 0.

Załóżmy teraz, że $x_1 = x_2 = 0$; otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{array}{rrrcr} x_3 & & & = & 12 \\ & x_4 & & = & 8 \\ & & x_5 & = & 16 \end{array}$$

którego rozwiązaniem jest $[x_3\ x_4\ x_5]^T = [12\ 8\ 16]^T$. Otrzymaliśmy więc **dopuszczalne rozwiązanie bazowe** postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Załóżmy teraz, że $x_1 = x_3 = 0$; otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{array}{rrrcr} +2x_2 & & & = & 12 \\ +2x_2 & +x_4 & & = & 8 \\ & & x_5 & = & 16 \end{array}$$

którego rozwiązaniem jest $[x_2\ x_4\ x_5]^T = [6\ \ -4\ 16]^T$. Otrzymaliśmy więc **niedopuszczalne rozwiązanie bazowe** postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

1.8 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.1.
Rozwiązać metodą graficzną następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} z = 3x_1 - x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +1x_2 & \geqslant & 2 \\ x_1 & +3x_2 & \leqslant & 3 \\ & +x_2 & \leqslant & 4 \end{array}$$
$$\forall i\ x_i \geqslant 0$$

Zadanie 1.2.
Rozwiązać metodą graficzną następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} z = x_1 - x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +1x_2 & \geqslant & 2 \\ -x_1 & -x_2 & \geqslant & 1 \end{array}$$
$$\forall i\ x_i \geqslant 0$$

Zadanie 1.3.
Rozwiązać metodą graficzną następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} z = 3x_1 - 4x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 4x_1 & +2x_2 & \geqslant & 4 \\ x_1 & +x_2 & \geqslant & 1 \end{array}$$
$$\forall i\ x_i \geqslant 0$$

Zadanie 1.4.
Znaleźć wszystkie bazowe rozwiązania dopuszczalne dla układu równań

$$\begin{array}{rrrrcr} +2x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 3 \\ +6x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +6x_4 & = & 2 \end{array}$$

Ćwiczenia 2

Metoda sympleks

Metoda sympleks służy do rozwiązywania (nawet bardzo złożonych) zagadnień programowania liniowego. Jest to metoda polegająca na „inteligentnym” przeszukiwaniu poszczególnych punktów wierzchołkowych obszaru rozwiązań dopuszczalnych, czyli dopuszczalnych rozwiązań bazowych.

Jest to metoda iteracyjna i wymaga, aby punkt startowy był dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym. W każdej kolejnej iteracji znajdowany jest kolejne, lepsze (o mniejszej wartości funkcji celu) dopuszczalne rozwiązanie bazowe poprzez wprowadzenie jednej zmiennej do bazy i wyprowadzenie jednej zmiennej z bazy.

2.1 Tablica sympleksów

Poniżej przedstawiona została ogólna postać tablicy sympleksów wraz ze stosowanymi oznaczeniami

				c_1	c_2	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_n
1	P_{b_1}	c_{b_1}	t_{10}	t_{11}	t_{12}	$\cdots$	t_{1k}	$\cdots$	t_{1n}
2	P_{b_2}	c_{b_2}	t_{20}	t_{21}	t_{22}	$\cdots$	t_{2k}	$\cdots$	t_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
l	P_{b_l}	c_{b_l}	t_{l0}	t_{l1}	t_{l2}	$\cdots$	$\boxed{t_{lk}}$	$\cdots$	t_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
m	P_{b_m}	c_{b_m}	t_{m0}	t_{m1}	t_{m2}	$\cdots$	t_{mk}	$\cdots$	t_{mn}
$m+1$	$z_j - c_j$		z_0	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_n - c_n$

gdzie

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i t_{ij} \tag{2.1}$$

Ponadto w początkowej tablicy sympleksów zachodzi

$$\begin{aligned} t_{i0} &= b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ t_{ij} &= a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m \ j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.2}$$

Indeksy $b_1, \ldots, b_m$ należy zastąpić indeksami zmiennych bazowych, których odpowiadające im kolumny wyznaczają macierz jednostkową.

2.2 Schemat metody

1. Przekształć zadanie do postaci standardowej (**Uwaga!** $b \geqslant 0$!)

2. Jeśli w macierzy ograniczeń $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ występuje macierz jednostkowa (można ją złożyć z dowolnych m kolumn w dowolnej kolejności) to idź do kolejnego kroku, jeśli nie, to zastosuj metodę sztucznej bazy,

3. Wybierz zmienną wprowadzaną do bazy na podstawie kryterium

$$k = \arg \max_{\substack{j=1\dots n \\ z_j - c_j > 0}} z_j - c_j \tag{2.3}$$

gdzie k to numer odpowiedniej zmiennej. Jeśli nie istnieje takie j dla którego $z_j - c_j > 0$ to STOP - znalezione rozwiązanie jest optymalne.

4. Wybierz zmienną wyprowadzaną z bazy na podstawie kryterium

$$l = \arg \min_{\substack{i=1\dots m \\ t_{ik} > 0}} \frac{t_{i0}}{t_{ik}} \tag{2.4}$$

gdzie t_{ij} są elementami tablicy sympleksów, a l jest numerem wiersza odpowiadającego zmiennej bazowej. Jeśli nie istnieje takie l dla którego $t_{lk} > 0$ to STOP - zadanie ma nieograniczone rozwiązanie optymalne,

5. Przekształć tablicę sympleksów zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} t'_{ij} &= t_{ij} - \frac{t_{lj}}{t_{lk}} t_{ik}, \quad i \neq l \\ t'_{lj} &= \frac{t_{lj}}{t_{lk}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

6. Wróć do kroku 3.

2.3 Praktyczne metody weryfikacji

Poniżej podane zostaną główne metody weryfikacji pozwalające stwierdzić, że coś jest nie tak w danym kroku metody

- Kolumna P_0 powinna zawierać **zawsze** elementy nieujemne (włącznie z tablicą startową!),
- Jeśli kolumna P_0 zawiera choć jeden element ujemny, patrz punkt poprzedni,
- W każdym kolejnym kroku metody sympleks wartość z_0 powinna się zmniejszać (przynajmniej nie rosnąć),
- W kolumnie P_0 znajduje się aktualnie znalezione rozwiązanie, powinno być ono dopuszczalne, więc można je zweryfikować z ograniczeniami zadania wyjściowego,
- W każdej z kolumn odpowiadającej zmiennej bazowej powinien występować wektor jednostkowy (z jedynką na odpowiednim miejscu); Tych kolumn nie trzeba przeliczać (wystarczy uzupełnić zerami i jedną jedynką),
- Wzór (2.1) obowiązuje dla każdej tablicy sympleksów; można zweryfikować czy obliczenia przy użyciu wzorów (2.5) są zgodne ze wzorem (2.1).
- Jeśli korzystamy ze wzorów (2.5), to warto obliczyć najpierw ostatni wiersz tablicy sympleks – jeśli nie zawiera on liczb ujemnych, to można reszty tablicy nie obliczać, bo znaleźliśmy rozwiązanie optymalne.

2.4 Przykłady rozwiązań

Przykład 2.4.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego metodą sympleksów

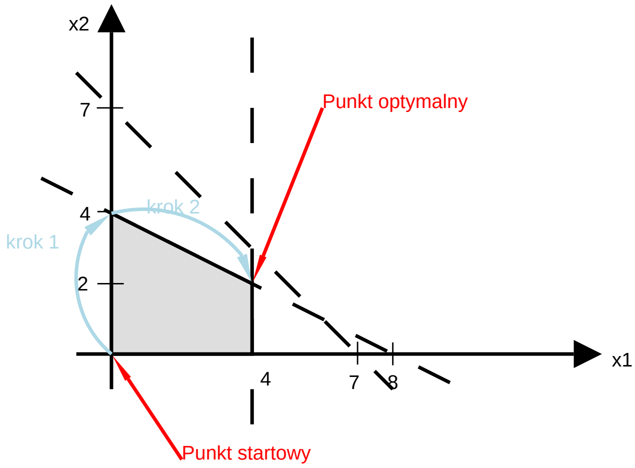
$$\max \; z = 2x_1 + 3x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +2x_2 & \leqslant & 14 \\ x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ 4x_1 & & \leqslant & 16 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Zbiór rozwiązań dopuszczalnych, oraz kolejne iteracje metody sympleksów, które zostaną wykonane, przedstawione zostały na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Kolejne kroki metody sympleks dla przykładu 2.4.1

KROK I Przekształcamy zagadnienie do postaci standardowej, otrzymujemy

$$\min \ z = -2x_1 - 3x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 14 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ 4x_1 & & & & +x_5 & = & 16 \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0$$

KROK II Bazowe, dopuszczalne rozwiązanie początkowe dane jest jako $x = [0, 0, 14, 8, 16]$,

KROK III Budujemy startową tablicę sympleksów

				-2	-3	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	14	2	2	1	0	0
2	P_4	0	8	1	$\boxed{2}$	0	1	0
3	P_5	0	16	4	0	0	0	1
4	$z_j - c_j$		0	2	3	0	0	0

- Wybieramy zmienną wprowadzaną do bazy. Szukamy wartości maksymalnej (dodatniej) w ostatnim wierszu tablicy

$$\max\{2, 3\} = 3 \implies \text{zmienna } x_2 \text{ będzie wprowadzona do bazy}$$

- Wybieramy zmienną wyprowadzaną z bazy. Szukamy minimum z ilorazów kolumny P_0 przez kolumnę zmiennej wprowadzanej do bazy (w tym przypadku P_2). Uwaga - dzielimy tylko przez liczby dodatnie!

$$\min\left\{\frac{14}{2}, \frac{8}{2}\right\} = 4 \implies \text{Zmienna } x_4 \text{ wychodzi z bazy}$$

KROK IV Przekształcamy tablicę sympleksów odpowiednio mnożąc i dodając do siebie wiersze tablicy tak, aby w zaznaczonym miejscu znalazła się 1 a w pozostałych miejscach w tej kolumnie 0. Wykonujemy więc następujące obliczenia

- Dzielimy wiersz drugi przez 2
- Od wiersza pierwszego odejmujemy (stary) wiersz drugi

bądź korzystamy ze wzorów (2.5). Otrzymujemy następującą tablicę

				-2	-3	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	6	1	0	1	-1	0
2	P_2	-3	4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0
3	P_5	0	16	$\boxed{4}$	0	0	0	1
4	$z_j - c_j$		-12	$\frac{1}{2}$	0	0	-$\frac{3}{2}$	0

- Ponownie wybieramy zmienną wprowadzaną do bazy. Szukamy wartości maksymalnej (dodatniej) w ostatnim wierszu tablicy

$$\max\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \implies \text{zmienna } x_1 \text{ będzie wprowadzona do bazy}$$

- Wybieramy zmienną wyprowadzaną z bazy. Szukamy minimum z ilorazów kolumny P_0 przez kolumnę zmiennej wprowadzanej do bazy (w tym przypadku P_1). Ponownie dzielimy tylko przez liczby dodatnie!

$$\min\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{16}{4}\right\} = 4 \implies \text{Zmienna } x_5 \text{ wychodzi z bazy}$$

KROK V Ponownie przekształcamy tablicę sympleksów

- Wiersz trzeci dzielimy przez 4
- Od wiersza pierwszego odejmujemy (nowy) wiersz trzeci
- Od wiersz drugiego odejmujemy wiersz trzeci pomnożony przez $\frac{1}{2}$.

				-2	-3	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	2	0	0	1	-1	$-\frac{1}{4}$
2	P_2	-3	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
3	P_1	-2	4	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$
4	$z_j - c_j$		-14	0	0	0	-$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$

Ponieważ wszystkie liczby w ostatnim rzędzie tabeli są niedodatnie, to KONIEC. Rozwiązaniem jest kolumna P_0 z uwzględnieniem kolejności zmiennych w bazie (wypisanych kolumnę obok)

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a wartość funkcji celu w punkcie optymalnym wynosi -14 (ostatni wiersz kolumny P_0).

Przykład 2.4.2.
Następujące zagadnienie programowania liniowego rozwiązać metodą sympleksów

$$\min z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +2x_5 & & = 7 \\ & -2x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & = 12 \\ & -4x_2 & +3x_3 & & +8x_5 & +x_6 & = 10 \end{array}$$

$$\forall j \; x_j \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Początkowa baza składa się z wektorów P_1, P_4 oraz P_6, a rozwiązaniem jest $X_0 = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [7, 0, 0, 12, 0, 10]^T$ (lub w skrócie $X_0 = [x_1, x_4, x_6]^T = [7, 12, 10]^T$). Łatwo obliczyć, że wartość funkcji celu $z_0 = 0$.

Krok I Rysujemy początkową tablicę sympleksów

				0	1	-3	0	2	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
2	P_4	0	12	0	-2	$\boxed{4}$	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
4	$z_j - c_j$		0	0	-1	3	0	-2	0

- Znajdujemy maximum

$$\max_j (z_j - c_j) = z_3 - c_3 = 3 > 0$$

Ponieważ znalezione maximum jest większe od zera, znalezione rozwiązanie nie jest optymalne i tym samym do bazy wprowadzamy P_3.

- Obliczamy minimum z ilorazów x_{i0}/x_{i3}, gdzie x_{i0} są liczbami w kolumnie odpowiadającej P_0, a x_{i3} liczbami w kolumnie odpowiadającej P_3 (ilorazy liczymy tylko dla $x_{i3} > 0$).

$$\min\left\{\frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right\} = \frac{12}{4} \tag{2.6}$$

Krok II Przekształcamy tablicę sympleksów odpowiednio mnożąc i dodając do siebie wiersze tablicy tak, aby w zaznaczonym miejscu znalazła się 1 a w pozostałych miejscach w tej kolumnie 0. Wykonujemy więc następujące obliczenia

- Dzielimy wiersz drugi przez 4
- Do wiersza pierwszego dodajemy nowy wiersz drugi
- Od wiersza trzeciego odejmujemy pomnożony przez 3 (nowy) wiersz drugi

Kolejna tablica sympleksów będzie mieć więc następującą postać

				0	1	-3	0	2	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	10	1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	$\frac{1}{4}$	2	0
2	P_3	-3	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
3	P_6	0	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1
4	$z_j - c_j$		-9	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	-2	0

- Ponownie szukamy maximum z ostatniego wiersza w tablicy (bez kolumny P_0)

$$\max_j (z_j - c_j) = \max\left\{0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}, -2, 0\right\} = \frac{1}{2}$$

stąd zmienną wprowadzaną do bazy będzie zmienna odpowiadająca kolumnie P_2.

- Aby wyznaczyć zmienną wyprowadzaną obliczamy ponownie ilorazy

$$\min\left\{\frac{10}{\frac{5}{2}}\right\} = 4$$

A więc zmienną wyprowadzaną z bazy będzie zmienna związana z kolumną P_1.

Krok III Ponownie przekształcamy tablicę sympleksów

- Wiersz pierwszy mnożymy przez $\frac{2}{5}$
- Do wiersza drugiego dodajemy (nowy) wiersz pierwszy pomnożony przez $\frac{1}{2}$
- Do wiersza trzeciego dodajemy (stary) pierwszy
- Obliczamy ostatni wiersz tablicy

Otrzymana tablica sympleksów ma postać

				0	1	-3	0	2	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
2	P_3	-3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
3	P_6	0	11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
4	$z_j - c_j$		-11	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

KROK IV Ponieważ wszystkie wartości $z_j - c_j$ są niedodatnie, to KONIEC. Rozwiązaniem jest wektor

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(odczytujemy go z kolumny P_0 w tablicy sympleksów (patrząc na to, jakie zmienne są w bazie), a wartość funkcji celu to $z_0 = -11$ (również w ostatnim wierszu tej kolumny)

Przykład 2.4.3.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\min_{x_i} z = -1x_1 - 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} -1x_1 & +1x_2 & \leqslant & 3 \\ -1x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ -1x_1 & +3x_2 & \leqslant & 15 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrcr} -1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & & = & 3 \\ -1x_1 & +2x_2 & & +1x_4 & & = & 8 \\ -1x_1 & +3x_2 & & & +1x_5 & = & 15 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

KROK I Tablica początkowa metody sympleks

				-1	-2	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	3	-1	$\boxed{1}$	1	0	0
2	P_4	0	8	-1	2	0	1	0
3	P_5	0	15	-1	3	0	0	1
4	$z_j - c_j$		0	1	2	0	0	0

KROK II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-1	-2	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_2	-2	3	-1	1	1	0	0
2	P_4	0	2	$\boxed{1}$	0	-2	1	0
3	P_5	0	6	2	0	-3	0	1
4	$z_j - c_j$		-6	3	0	-2	0	0

KROK III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-1	-2	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_2	-2	5	0	1	-1	1	0
2	P_1	-1	2	1	0	-2	1	0
3	P_5	0	2	0	0	$\boxed{1}$	-2	1
4	$z_j - c_j$		-12	0	0	4	-3	0

KROK IV Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-1	-2	0	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_2	-2	7	0	1	0	-1	1
2	P_1	-1	6	1	0	0	-3	2
3	P_3	0	2	0	0	1	-2	1
4	$z_j - c_j$		-20	0	0	0	5	-4

Ponieważ w kolumnie, którą chcemy wprowadzić do bazy (kolumna P_4) nie występuje żadna liczba dodatnia, oznacza to STOP, zadanie posiada nieograniczone rozwiązanie optymalne.

2.5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 2.1.
Następujące zagadnienie programowania liniowego rozwiązać metodą sympleksów

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} +2x_1 & +4x_2 & +1x_3 & \leqslant & 6 \\ +1x_1 & -4x_2 & +1x_3 & \leqslant & 4 \\ +2x_1 & +2x_2 & +1x_3 & \leqslant & 2 \end{array}$$

$$\forall j \; x_j \geqslant 0$$

Zadanie 2.2.
Następujące zagadnienie programowania liniowego rozwiązać metodą sympleksów

$$\max z = x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} +1x_1 & -2x_2 & +3x_3 & \leqslant & 10 \\ +2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & \leqslant & 12 \\ +1x_1 & +3x_2 & +1x_3 & \leqslant & 9 \end{array}$$

$$\forall j \; x_j \geqslant 0$$

Zadanie 2.3.
Następujące zagadnienie programowania liniowego rozwiązać metodą sympleksów

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} +2x_1 & +1x_2 & +5x_3 & \leqslant & 2 \\ +1x_1 & -2x_2 & +1x_3 & \leqslant & 1 \\ +1x_1 & +3x_2 & -1x_3 & \leqslant & 3 \end{array}$$
$$\forall j \ x_j \geqslant 0$$

Zadanie 2.4.
Następujące zagadnienie programowania liniowego rozwiązać metodą sympleksów

$$\max z = 4x_1 + 8x_2 - 3x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcr} +3x_1 & -1x_2 & -5x_3 & \leqslant & 5 \\ -5x_1 & +2x_2 & -1x_3 & \leqslant & 1 \\ -1x_1 & +2x_2 & +1x_3 & \leqslant & 3 \end{array}$$
$$\forall j \ x_j \geqslant 0$$

Ćwiczenia 3

Metoda sztucznej bazy

W poprzednio rozwiązywanych przykładach zakładaliśmy, że można znaleźć taką bazę, dla której wektory macierzy sympleksów odpowiadające zmiennym bazowym tworzyły macierz jednostkową. Metoda sztucznej bazy polega na dodaniu pewnych zmiennych po to, aby znaleźć bazę z macierzą jednostkową.

Warto zauważyć, że istnienie macierzy jednostkowej w zadaniach poprzednich wynikało z tego, że punkt $x^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$ był bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym. Metoda sztucznej bazy pozwala znaleźć początkowe rozwiązanie dopuszczalne różne od trywialnego (złożonego z samych zer).

3.1 Schemat metody

Zakładamy, że zadanie zostało już sprowadzone do postaci standardowej (m.in. wszystkie ograniczenia równościowe) i w początkowej tablicy sympleksów nie występuje macierz jednostkowa. Schemat metody sztucznej bazy jest następujący

1. Rozważ ograniczenie i-te
2. Jeśli w ograniczeniu i-tym występuje współczynnik 1, przy czym dla każdego ograniczenia j, $j \neq i$ w wybranej kolumnie występują same 0 to przejdź do punktu 4
3. W przeciwnym przypadku do ograniczenia i-tego dodaj *zmienną sztucznej bazy* oraz rozszerz funkcję celu o składnik wx_{k+1}, gdzie w jest pewną stałą dodatnią (nieustaloną), a k jest aktualną liczbą zmiennych w zadaniu.
4. Jeśli i-te ograniczenie nie jest ostatnim ograniczeniem, to podstaw $i = i + 1$ i przejdź do punktu 1
5. Rozwiąż zadanie stosując standardową metodę sympleks.

3.2 Rozszerzona tablica sympleks

Ponieważ zadanie wyjściowe jest modyfikowane, standardowa tablica sympleks jest też rozszerzana. Zwiększa się ilość kolumn, ale również dokładany jest dodatkowo jeden wiersz.

				c_1	c_2	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n	w	$\cdots$	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_n	P_{n+1}	$\cdots$	P_{n+s}
1	P_{b_1}	c_{b_1}	t_{10}	t_{11}	t_{12}	$\cdots$	t_{1k}	$\cdots$	t_{1n}	t_{1n+1}	$\cdots$	P_{1n+s}
2	P_{b_2}	c_{b_2}	t_{20}	t_{21}	t_{22}	$\cdots$	t_{2k}	$\cdots$	t_{2n}	t_{2n+1}	$\cdots$	P_{2n+s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
l	P_{b_l}	c_{b_l}	t_{l0}	t_{l1}	t_{l2}	$\cdots$	$\boxed{t_{lk}}$	$\cdots$	t_{ln}	t_{ln+1}	$\cdots$	P_{ln+s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
m	P_{b_m}	c_{b_m}	t_{m0}	t_{m1}	t_{m2}	$\cdots$	t_{mk}	$\cdots$	t_{mn}	t_{mn+1}	$\cdots$	P_{mn+s}
$m+1$	$z_j - c_j$		z_0	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_n - c_n$	0	$\cdots$	0
$m+2$			z_0^w	z_1^w	z_2^w	$\cdots$	z_k^w	$\cdots$	z_n^w	0	$\cdots$	0

gdzie s jest liczbą zmiennych sztucznej bazy oraz

$$z_j = \sum_{\substack{i=1 \\ c_i \neq w}}^{m} c_i t_{ij}, \quad z_j^w = \sum_{\substack{i=1 \\ c_i = w}}^{m} t_{ij} \tag{3.1}$$

Ponadto w początkowej tablicy sympleksów zachodzi

$$\begin{aligned} t_{i0} &= b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ t_{ij} &= a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m \; j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.2}$$

Indeksy $b_1, \ldots, b_m$ należy zastąpić indeksami zmiennych bazowych, których odpowiadające im kolumny wyznaczają macierz jednostkową. Wielkość w nie musi być jednoznacznie wyznaczona (musi być tylko dodatnia).

Uwaga Jeśli w aktualnej bazie występują zmienne sztucznej bazy, to w metodzie sympleks używamy wiersza $m+2$ zamiast wiersza $m+1$. W rozszerzonej tablicy sympleks kolumny odpowiadające zmiennym sztucznej bazy występują jedynie, jeśli dana zmienna jest w aktualnej bazie. Jeśli zmienna ta wyjdzie z bazy, to odpowiadająca jej kolumna może być usunięta z tablicy sympleks (i tym samym nie trzeba jej już przeliczać). Jeśli w bazie nie występują zmienne sztucznej bazy, to wiersz $m+2$ nie jest już potrzebny i również może być pominięty.

3.3 Możliwe rozwiązania

Rozwiązując zagadnienie przy użyciu metody sztucznej bazy i metody sympleks możemy otrzymać następujące rozwiązania

- W bazie rozwiązania optymalnego nie występują zmienne sztucznej bazy $\longleftarrow$ znalezione rozwiązanie jest dopuszczalnym rozwiązaniem optymalnym.
- W bazie rozwiązania optymalnego występuje choć jedna zmienna sztucznej bazy $\longleftarrow$ zadanie jest sprzeczne.

Warto zauważyć, że jeśli zadanie posiada nieskończone rozwiązanie optymalne, to metoda sztucznej bazy pozwoli najpierw na znalezienie początkowego rozwiązania dopuszczalnego, a dopiero **później** metoda sympleks pozwoli wykryć nieskończoność rozwiązania.

3.4 Uwagi praktyczne

Następujące uwagi mogą być przydatne podczas rozwiązywania zadań przy użyciu metody sztucznej bazy

- W danej iteracji niekoniecznie z bazy musi wyjść zmienna sztucznej bazy,
- Zmienne sztucznej bazy nie muszą z niej wychodzić w kolejności ich indeksów. (Z bazy najpierw mogą wyjść kolejno np. P_7, P_5 a na końcu P_6),
- W etapie, w którym w bazie występują zmienne sztucznej bazy wartość funkcji celu z_0 niekoniecznie musi maleć,
- Musi natomiast maleć wartość $z_)^w$ w kolejnych iteracjach, aż zostanie zredukowana do 0.

3.5 Przykłady rozwiązań

Przykład 3.5.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^4} z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & 15 \\
2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & = & 20 \\
2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 20
\end{array}
$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie

Zadanie jest już w postaci standardowej, więc nie musimy go do niej sprowadzać. Warto zwrócić uwagę, że ten układ może zawierać jeden wektor jednostkowy (odpowiadający zmiennej x_4) - trzeba jedynie podzielić ograniczenie przez 2. Stąd potrzebne jest dodanie jedynie dwóch zmiennych sztucznych. Zmienne te wchodzą do funkcji celu z arbitralnym, dodatnim współczynnikiem w.

Po podzieleniu trzeciego ograniczenia przez 2 i dodaniu zmiennych otrzymujemy następujące zadanie ze zmiennymi sztucznymi

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^6} z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + wx_5 + wx_6$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & & = & 15 \\
2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 20 \\
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = & 10
\end{array}
$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązujemy zadanie stosując metodę sympleks i rozszerzoną funkcję celu

Krok I Początkowa tablica symplek jest następująca

				-1	-2	-3	1	w	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	w	15	1	2	3	0	1	0
2	P_6	w	20	2	1	$\boxed{5}$	0	0	1
3	P_4	1	10	1	2	1	1	0	0
4	$z_j - c_j$		10	2	4	4	0	0	0
5			35	3	3	8	0	0	0

Tak skonstruowaną tablicę sympleksów przekształcamy zgodnie ze standardowymi regułami. Jedyną różnicę stanowi wybór zmiennej wprowadzanej do bazy (wybieramy największą liczbę dodatnią z wiersza ostatniego).

Krok II Kolejna tablica metody dla przykładu (bez kolumny odpowiadającej wyprowadzonej zmiennej sztucznej bazy P_6).

				-1	-2	-3	1	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	w	3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	1	1
2	P_3	-3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0
3	P_4	1	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	0
4	$z_j - c_j$		-6	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	0	0
5			3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0

Krok III Z bazy została wyeliminowana ostatnia zmienna sztucznej bazy, dlatego kolejna tablica nie zawiera już wiersza piątego (i kolumny odpowiadającej wyeliminowanej zmiennej). Kolejna tablica wygląda następująco

				-1	-2	-3	1
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	-2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	1
2	P_3	-3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0
3	P_4	1	$\frac{15}{7}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1
4	$z_j - c_j$		$-\frac{90}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	0

Znaleźliśmy w ten sposób rozwiązanie dopuszczalne zadania wyjściowego (kolumna P_0)

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{7} \\ \frac{25}{7} \\ \frac{15}{7} \end{bmatrix}$$

oraz przekształciliśmy tablicę sympleksów tak, aby znajdowała się w niej macierz jednostkowa utworzona z wektorów odpowiadających zmiennym bazowym. Kolejne kroki wykonujemy stosując standardową metodę sympleks.

KROK IV Po przekształceniu otrzymujemy następującą tablicę sympleks

				-1	-2	-3	1
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	-2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$
2	P_3	-3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{6}$
3	P_1	-1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$
4	$z_j - c_j$		-15	0	0	0	-1

STOP – Znaleziono rozwiązanie optymalne

Odpowiedź

Rozwiązaniem zadania jest punkt $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$. Natomiast optymalna wartość funkcji celu to $c^T\hat{x} = -15$.

Przykład 3.5.2.

Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 2x_1 - 1x_2 + 2x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{cccccc} 1x_1 & +1x_2 & -1x_3 & \geqslant & 4 \\ 2x_1 & -1x_2 & -2x_3 & \leqslant & 1 \\ 1x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & -5 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie

Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -2x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & +1x_2 & -1x_3 & -1x_4 & & = & 4 \\ 2x_1 & -1x_2 & -2x_3 & & +1x_5 & = & 1 \\ -1x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & = & 5 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -2x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + wx_6 + wx_7$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 1x_1 & +1x_2 & -1x_3 & -1x_4 & & +1x_6 & & = & 4 \\ 2x_1 & -1x_2 & -2x_3 & & +1x_5 & & & = & 1 \\ -1x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & & +1x_7 & = & 5 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

KROK I Tablica początkowa metody sympleks

				-2	1	-2	0	0	w	w
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_6	w	4	1	1	-1	-1	0	1	0
2	P_5	0	1	2	-1	-2	0	1	0	0
3	P_7	w	5	-1	$\boxed{2}$	3	0	0	0	1
4	$z_j - c_j$		0	2	-1	2	0	0	0	0
5			9	0	3	2	-1	0	0	0

KROK II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	1	-2	0	0	w
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_6	w	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1
2	P_5	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
3	P_2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	0
4	$z_j - c_j$		$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	0	0	0
5			$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-1	0	0

KROK III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	1	-2	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	-2	1	1	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
2	P_5	0	2	0	0	$\boxed{2}$	1	1
3	P_2	1	3	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
4	$z_j - c_j$		1	0	0	6	1	0

KROK IV Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-2	1	-2	0	0
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	-2	$\frac{8}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
2	P_3	-2	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	P_2	1	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	$z_j - c_j$		-5	0	0	0	-2	-3

STOP – Znaleziono rozwiązanie optymalne

Odpowiedź

Rozwiązaniem zadania jest punkt $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$. Natomiast optymalna wartość funkcji celu to $c^T\hat{x} = 5$.

Przykład 3.5.3.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\min_{x_i} z = 2x_1 - 3x_2 + 0x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & \geqslant & 3 \\ 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & \geqslant & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = 2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -1x_4 & & = & 3 \\ 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & -1x_5 & = & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = 2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + wx_6 + wx_7$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -1x_4 & & +1x_6 & & = & 3 \\ 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & -1x_5 & & +1x_7 & = & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

Krok I Tablica początkowa metody sympleks

				2	-3	0	0	0	w	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_6	w	3	$\boxed{2}$	-1	-1	-1	0	1	0
2	P_7	w	2	1	-1	1	0	-1	0	1
3	$z_j - c_j$		0	-2	3	0	0	0	0	0
4			5	3	-2	0	-1	-1	0	0

Krok II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				2	-3	0	0	0	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7
1	P_1	2	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
2	P_7	w	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
3	$z_j - c_j$		3	0	2	-1	-1	0	0
4			$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0

Krok III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				2	−3	0	0	0
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
2	P_3	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
3	$z_j - c_j$		$\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

STOP – Zadanie ma nieograniczone rozwiązanie optymalne

Przykład 3.5.4.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 3x_1 + 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +1x_2 & \leqslant & 2 \\ -1x_1 & -1x_2 & \leqslant & -3 \\ -1x_1 & +1x_2 & \leqslant & 0 \\ & \forall i \; x_i \geqslant 0 & & \end{array}$$

Rozwiązanie
Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej i otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & & = & 2 \\ 1x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & = & 3 \\ -1x_1 & +1x_2 & & & +1x_5 & = & 0 \\ & & \forall i \; x_i \geqslant 0 & & & & \end{array}$$

Po dodaniu zmiennych sztucznych otrzymujemy

$$\min_{x_i} z = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + wx_6$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & & & = & 2 \\ 1x_1 & +1x_2 & & -1x_4 & & +1x_6 & = & 3 \\ -1x_1 & +1x_2 & & & +1x_5 & & = & 0 \\ & & \forall i \; x_i \geqslant 0 & & & & & \end{array}$$

Przechodzimy do rozwiązania metodą sympleks

Krok I Tablica początkowa metody sympleks

				−3	−2	0	0	0	w
i	Baza	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	2	$\boxed{2}$	1	1	0	0	0
2	P_6	w	3	1	1	0	−1	0	1
3	P_5	0	0	−1	1	0	0	1	0
4	$z_j - c_j$		0	3	2	0	0	0	0
5			3	1	1	0	−1	0	0

Krok II Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-3	-2	0	0	0	w
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	-3	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
2	P_6	w	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
3	P_5	0	1	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0
4	$z_j - c_j$		-3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0
5			2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0

KROK III Kolejna tablica sympleks wygląda następująco

				-3	-2	0	0	0	w
i	BAZA	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	-3	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
2	P_6	w	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1
3	P_2	-2	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
4	$z_j - c_j$		$-\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0
5			$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0

STOP – Zadanie jest sprzeczne, ponieważ w rozwiązaniu optymalnym w bazie występują zmienne sztucznej bazy

3.6 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 5x_1 - 1x_2 + 3x_3 - 10x_4 + 7x_5$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & -1x_2 & -1x_3 & & & = & 4 \\ 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & +1x_4 & & = & 1 \\ 2x_1 & +1x_2 & +2x_3 & & +1x_5 & = & 7 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Zadanie 3.2.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego metodą sympleks

$$\min_{x_i} z = -1x_1 + 2x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrll} 5x_1 & +2x_2 & \leqslant & 3 \\ 1x_1 & +1x_2 & \geqslant & 1 \\ -3x_1 & +1x_2 & \leqslant & 3 \\ -3x_1 & -3x_2 & \leqslant & 2 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Zadanie 3.3.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 - 3x_4 + 1x_5 - 1x_6 - 3x_7$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & +3x_3 & & +1x_5 & +1x_6 & & = & 6 \\
 & +1x_2 & +2x_3 & -1x_4 & & & & = & 10 \\
-1x_1 & & & & & +1x_6 & & = & 0 \\
 & & +1x_3 & & & +1x_6 & +1x_7 & = & 6
\end{array}
$$

$$\forall i \ x_i \geqslant 0$$

Zadanie 3.4.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x_i} z = 3x_1 - 1x_2$$

przy ograniczeniach:

$$
\begin{array}{cccc}
2x_1 & +1x_2 & \geqslant & 2 \\
1x_1 & +3x_2 & \leqslant & 3 \\
 & +1x_2 & \leqslant & 4
\end{array}
$$

$$\forall i \ x_i \geqslant 0$$

Ćwiczenia 4

Zagadnienie dualne programowania liniowego

Każdemu zagadnieniu programowania liniowego odpowiada zagadnienie optymalizacji zwane *zagadnieniem dualnym.* Wyjściowe zagadnienie nazywamy *zagadnieniem pierwotnym.* Optymalne rozwiązanie jednego z nich zawiera informację o optymalnym rozwiązaniu drugiego.

Zagadnienia dualne wykorzystuje się w praktyce do:

1. Uproszczenia obliczeń
2. Obliczenia wrażliwości rozwiązania na ograniczenia

Twierdzenie 4.1. *Zagadnienie dualne do zagadnienia dualnego jest zadaniem pierwotnym.*

Powyższe twierdzenie pozwala traktować każde zadanie jako pierwotne lub dualne (i tworzyć zadanie dualne lub pierwotne dla niego).

Warto zauważyć, że oba zagadnienia są rozwiązywane **w innych przestrzeniach**. Dlatego też zmienne w jednym z tych zagadnień nie mają (bezpośredniego) przełożenia na zmienne rozwiązania drugiego (w szczególności w typowym przypadku liczba zmiennych jest różna dla obu zadań).

4.1 Niesymetryczne zagadnienia dualne

Niesymetryczne zagadnienia dualne odnoszą się do zagadnień pierwotnych, w których występują ograniczenia **równościowe** (przy „standardowych" ograniczeniach na nieujemność zmiennych).

Zachodzi następujący wzór

Zagadnienie Pierwotne	**Zagadnienie Dualne**
$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x$	$\max_{w\in\mathbb{R}^m} b^T w$
$Ax = b$	$A^T w \leqslant c$
$x \geqslant 0$	**Nie ma ograniczenia** $w \geqslant 0$

Przykład 4.1.1.
Zapisać zagadnienie pierwotne dla następującego zagadnienia dualnego

$$\max_{w\in\mathbb{R}^3} w_1 + 3w_2 + 3w_3$$
$$\begin{array}{cccll} 7w_1 & +3w_2 & -4w_3 & \leqslant & 2 \\ 2w_1 & -2w_2 & +w_3 & \leqslant & 4 \end{array}$$

Rozwiązanie
Mamy w tym przykładzie następujące dane (dla zagadnienia dualnego)

$$b^T = [1\ 3\ 3]\,, \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ w przykładzie **nie** występują ograniczenia na nieujemność zmiennych, korzystamy ze wzoru dla niesymetrycznych zagadnień dualnych i otrzymujemy dane dla zagadnienia pierwotnego

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad c^T = [2\ 4], \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

A więc zagadnieniem pierwotnym dla omawianego zagadnienia jest

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{przy ograniczeniach:}$$

$$\begin{array}{rrcr} 7x_1 & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & -2x_2 & = & 3 \\ -4x_1 & 1x_2 & = & 3 \end{array}$$

$$\forall i \ x_i \geqslant 0$$

Przykład 4.1.2.
Zapisać zagadnienie dualne do następującego zagadnienia pierwotnego

$$\max_{w \in \mathbb{R}^3} w_1 + 3w_2 + 3w_3$$

$$\begin{array}{rrrcr} 7w_1 & +3w_2 & -4w_3 & \leqslant & 2 \\ 2w_1 & -2w_2 & +w_3 & \leqslant & 4 \end{array}$$

Rozwiązanie
Warto zauważyć, że jest to inaczej sformułowane zadanie poprzednie i rozwiązanie jest identyczne. Korzystamy tylko z twierdzenia 4.1.

4.2 Symetryczne zagadnienia dualne

Symetryczne zagadnienia dualne można skonstruować dla zagadnień pierwotnych z ograniczeniami wyłącznie **nierównościowymi** wraz ze standardowymi ograniczeniami na nieujemność zmiennych.

Zachodzi następujący wzór

Zagadnienie Pierwotne	**Zagadnienie Dualne**
$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$	$\max_{w \in \mathbb{R}^m} b^T w$
$Ax \geqslant b$	$A^T w \leqslant c$
$x \geqslant 0$	$w \geqslant 0$

Przykład 4.2.1.
Zapisać zagadnienie dualne do następującego zagadnienia pierwotnego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & \geqslant & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & \geqslant & -3 \\ -4x_1 & 1x_2 & \geqslant & -1 \end{array}$$

$$\forall i \ x_i \geqslant 0$$

Rozwiązanie
Jak widać w zadaniu występują wyłącznie ograniczenia nierównościowe i ograniczenia na nieujemność zmiennych, dlatego stosujemy wzór dla symetrycznych zagadnień dualnych. Mamy następujące dane:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad c^T = [1\ 2], \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Stosujemy wzór dla zagadnień symetrycznych, a więc będziemy potrzebować następujących danych

$$b^T = [1 \ -3 \ -1]\,, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie otrzymujemy zagadnienie dualne postaci

$$\max_{w\in\mathbb{R}^3} 1w_1 - 3w_2 - w_3$$

$$\begin{array}{rrrcr} 3w_1 & +2w_2 & -4w_3 & \leqslant & 1 \\ 2w_1 & -2w_2 & +w_3 & \leqslant & 2 \end{array}$$

$$\forall i \ w_i \geqslant 0$$

Przykład 4.2.2.
Zapisać zagadnienie pierwotne dla następującego zagadnienia dualnego

$$\min_{x\in\mathbb{R}^4} x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & 4x_4 & \geqslant & -1 \\ -2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -3x_4 & \leqslant & 3 \\ x_1 & & & & \geqslant & 0 \\ & x_2 & & & \geqslant & 0 \\ & & x_3 & & \geqslant & 0 \\ & & & x_4 & \geqslant & 0 \end{array}$$

Rozwiązanie
Widać, że występują jedynie ograniczenia nierównościowe, a ponadto (zapisane w sposób trochę inny od standardowego) występują ograniczenia na nieujemność zmiennych. Będziemy stosować wzór dla niesymetrycznych zagadnień. Niestety, postać zadania nie jest odpowiednia do stosowania wzoru (nie wszystkie ograniczenia są jednakowego znaku). Dodatkowo zauważmy, że w funkcji celu zmienna x_4 występuje niejawnie ze współczynnikiem 0.

Należy to zadanie **najpierw przekształcić do odpowiedniej postaci**, a następnie zastosować wzór dla symetrycznych zagadnień dualnych. Dzięki twierdzeniu 4.1 można przekształcić zadanie do dowolnej postaci podanej dla zagadnień symetrycznych (albo postaci zadania pierwotnego, czyli min i wszystkie ograniczenia $\geqslant$, bądź do postaci zadania dualnego, czyli max i wszystkie ograniczenia typu $\leqslant$).

Przekształćmy zadanie do postaci zadania dualnego występującego we wzorze dla symetrycznych zadań dualnych (czyli max i wszystkie ograniczenia typu $\leqslant$). Zamieniamy funkcję celu mnożąc ją przez -1 aby otrzymać maksymalizację. Podobnie mnożymy przez -1 ograniczenie pierwsze aby otrzymać ograniczenie typu $\leqslant$. Otrzymujemy zadanie

$$\max_{x\in\mathbb{R}^4} \ -x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rrrrcr} -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -4x_4 & \leqslant & 1 \\ -2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -3x_4 & \leqslant & 3 \end{array}$$

$$\forall i \ x_i \geqslant 0$$

Stosujemy wzór dla symetrycznych zagadnień dualnych i otrzymujemy szukane zadanie postaci

$$\min_{w\in\mathbb{R}^2} \ w_1 + 3w_2$$

$$\begin{array}{rrcr} -3w_1 & -2w_2 & \geqslant & -1 \\ -2w_1 & -4w_2 & \geqslant & -2 \\ -3w_1 & 2w_2 & \geqslant & 1 \\ -4w_1 & -3w_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$

$$\forall i \ w_i \geqslant 0$$

Aby rozwiązać to zadanie metodą sympleksów trzeba je jeszcze sprowadzić do postaci standardowej (uwaga na ujemne liczby po prawej stronie!).

4.3 Najważniejsze twierdzenia dotyczące zagadnień dualnych

Twierdzenie 4.2. *Jeśli zagadnienie pierwotne posiada skończone rozwiązanie optymalne, to zagadnienie dualne również posiada skończone rozwiązanie optymalne i wartości celu w obu zagadnieniach w tym punkcie są sobie równe, to jest*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x = \max_{w\in\mathbb{R}^m} b^T w \tag{4.1}$$

Twierdzenie 4.3. *Jeśli zagadnienie dualne nie posiada skończonego rozwiązania optymalnego, to odpowiadające mu zadanie pierwotne nie ma rozwiązań dopuszczalnych.*

Zauważmy, że może zaistnieć sytuacja, w której oba zadania są sprzeczne (teza twierdzenia jest implikacją, a nie równoważnością).

Następujące twierdzenie wiąże rozwiązanie optymalne (o ile istnieje) zagadnienia dualnego z rozwiązaniem optymalnym rozwiązania pierwotnego.

Twierdzenie 4.4 (Tylko dla zagadnień symetrycznych)**.** *Dla optymalnych rozwiązań dopuszczalnych układów pierwotnego i dualnego, jeżeli tylko występuje ostra nierówność w k-tym ograniczeniu dowolnego układu (odpowiednia zmienna dopełniająca jest ściśle dodatnia), to k-ta zmienna w jego układzie dualnym jest równa* 0. *Jeśli k-ta zmienna jest ściśle dodatnia w dowolnym układzie, to k-te ograniczenie w jego układzie dualnym jest spełnione równościowo.*

Jeszcze raz warto zwrócić uwagę, że dzięki twierdzeniu 4.1 w powyższych twierdzeniach słowo *pierwotne* można zamienić na *dualne* i odwrotnie (zamieniając oczywiście wszystkie słowa jednocześnie).

Przykład 4.3.1.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania liniowego

$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} \; -14x_1 - 8x_2 - 16x_3$$

$$\begin{array}{rrrcr}
2x_1 & +x_2 & +4x_3 & \geqslant & 2 \\
-2x_1 & -2x_2 & & \leqslant & -3 \\
x_1 & & & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & & \geqslant & 0 \\
 & & x_3 & \geqslant & 0
\end{array}$$

Rozwiązanie
Pokażemy, jak wykorzystując twierdzenie 4.4 można uprościć sobie obliczenia. Ponieważ w danym zadaniu poszukujemy rozwiązania w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie można stosować metody graficznej, jedynie metodę sympleksów. Spróbujmy przekształcić zadanie do prostszej postaci. Użyjemy do tego wzoru dla symetrycznych zagadnień dualnych (wszystkie ograniczenia są nierównościowe oraz są ograniczenia na nieujemność zmiennych). Mnożąc przez -1 ograniczenie pierwsze otrzymujemy

$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} \; -14x_1 - 8x_2 - 16x_3$$

$$\begin{array}{rrrcr}
-2x_1 & -x_2 & -4x_3 & \leqslant & -2 \\
-2x_1 & -2x_2 & & \leqslant & -3
\end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

Zapiszmy więc zadanie dualne do powyższego korzystając ze wzoru dla symetrycznych zagadnień dualnych. Otrzymujemy

$$\min_{w\in\mathbb{R}^2} \; -2w_1 - 3w_2$$

$$\begin{array}{rrcr}
-2w_1 & -2w_2 & \geqslant & -14 \\
-w_1 & -2w_2 & \geqslant & -8 \\
-4w_1 & & \geqslant & -16
\end{array}$$

$$\forall i \; w_i \geqslant 0$$

Otrzymaliśmy więc zadanie rozwiązywane już na poprzednich ćwiczeniach. Powyższe zadanie można rozwiązać metodą graficzną. Optymalne rozwiązanie znajduje się w punkcie

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pozostaje pytanie, jak znaleźć rozwiązanie zadania wyjściowego. Do tego celu używamy twierdzenia 4.4.

Najpierw należy sprawdzić, które z ograniczeń zadania dualnego są aktywne (spełnione równościowo) w punkcie optymalnym. Spełnione równościowo są ograniczenia drugie oraz trzecie. Na podstawie twierdzenia 4.4 możemy więc stwierdzić, że w zadaniu pierwotnym druga i trzecia zmienna (x_2 oraz x_3) będą ściśle dodatnie, a zmienna pierwsza (x_1) będzie równa zeru.

Ponieważ zmienne obie zmienne zadania dualnego (w_1 oraz w_2) są ściśle dodatnie, a więc oba ograniczenia w zadania pierwotnego w punkcie optymalnym są spełnione równościowo.

Można teraz obliczyć rozwiązanie optymalne zadania pierwotnego z prostego układu równań

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = & 3 \end{array}$$

Rozwiązanie tego układu jest następujące

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

jest jednocześnie rozwiązaniem zadania wyjściowego.

4.4 Interpretacja rozwiązania zadania dualnego

W zadaniu dualnym liczba zmiennych jest dokładnie równa liczbie ograniczeń w zadaniu pierwotnym. Można się domyślać, że zmienne dualne są w pewien sposób powiązane z ograniczeniami zadania pierwotnego. Wyrazem tego jest twierdzenie 4.4. Ale rozwiązanie optymalne zadania dualnego mówi coś więcej.

Wartości poszczególnych zmiennych w optymalnym rozwiązaniu zadania dualnego mówią o tym, **jak zmieni się wartość funkcji celu zadania pierwotnego, jeśli zmienimy (nieznacznie) prawą stronę danego ograniczenia zadania pierwotnego**. Jest to więc wyznaczenie **wrażliwości** rozwiązania optymalnego na ograniczenia.

Weźmy dla przykładu rozwiązanie poprzedniego przykładu. Rozwiązanie optymalne zadania dualnego wynosi

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie to interpretuje się następująco;

Jeśli zmienimy (nieznacznie) prawą stronę ograniczenia pierwszego o δ, to wartość funkcji celu w rozwiązaniu optymalnym zadania pierwotnego zmieni się o 4δ. Jeśli natomiast zmienimy prawą stronę ograniczenia drugiego w zadaniu pierwotnym o δ, to wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego zadania pierwotnego zmieni się o 2δ. Oczywiście liczby 4 oraz 2 wzięte zostały z rozwiązania optymalnego zadania dualnego.

Zauważmy, że wartości zmiennych dualnych dla ograniczeń nieaktywnych (nie spełnionych równościowo) muszą mieć zmienne dualne równe 0, ponieważ zmiana tego ograniczenia nie pozwoli przesunąć punktu optymalnego (punkt ten na nim nie leży i nie jest ono „kluczowe"). Wyrazem tego jest właśnie twierdzenie 4.4.

Przykład 4.4.1.
O ile zmieni się wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego następującego zagadnienia programowania liniowego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 & +4x_2 & \geqslant & 1 \\ 1x_1 & +2x_2 & \geqslant & 1 \\ 2x_1 & +1x_2 & \geqslant & 1 \end{array}$$

$$\forall i \; x_i \geqslant 0$$

jeśli prawa strona ograniczenia pierwszego zostanie zmieniona na 1.1? A o ile zmieni się wartość funkcji celu rozwiązania optymalnego, jeśli prawa strona ograniczenia drugiego zostanie zmieniona na 0.9?

Rozwiązanie
Formułujemy dla tego zadania zagadnienie dualne, które ma postać

$$\max_{w\in\mathbb{R}^3} \; w_1 + w_2 + w_3$$
$$\begin{array}{rrrcr} 2w_1 & +w_2 & +2w_3 & \leqslant & 2 \\ 4w_1 & +2w_2 & +1w_3 & \leqslant & 2 \end{array}$$
$$\forall i \; w_i \geqslant 0$$

Rozwiązaniem tego zadania jest wektor (można rozwiązać metodą sympleks jako ćwiczenie)

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Ponieważ w pierwszym przypadku zmieniamy prawą stronę ograniczenia pierwszego o $\delta_1 = +0.1$, a ograniczenia drugiego o $\delta_2 = -0.1$, to:

- Wartość funkcji celu zagadnienia danego w zadaniu nie zmieni się wogóle przy zmianie prawej strony ograniczenia pierwszego (ponieważ odpowiednia zmienna dualna dla tego ograniczenia jest równa 0, a więc zmiana wartości funkcji celu wyniesie $0\delta_1 = 0$.
- Wartość funkcji celu zagadnienia danego w zadaniu **zmniejszy** się o $\frac{2}{30}$, ponieważ $\frac{2}{3}\delta_2 = -\frac{2}{3}\frac{1}{10} = -\frac{2}{30}$.

4.5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.1.
Zapisać zagadnienie pierwotne dla następującego zagadnienia dualnego

$$\max_{w\in\mathbb{R}^4} w_1 + 3w_2 + 3w_3 + w_4$$
$$\begin{array}{rrrrcr} 8w_1 & -15w_2 & -1w_3 & -4w_4 & \geqslant & 3 \\ 7w_1 & +2w_2 & +3w_3 & +3w_4 & \leqslant & 42 \\ 3w_1 & & -3w_3 & +2w_4 & \geqslant & -7 \end{array}$$

Zadanie 4.2.
Zapisać zagadnienie dualne dla następującego zagadnienia pierwotnego

$$\max_{x\in\mathbb{R}^3} 7x_1 + 3x_2 + 3x_3$$
$$\begin{array}{rrrcr} -3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & \leqslant & 32 \\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \geqslant & -4 \\ & +4x_2 & -9x_3 & \geqslant & -15 \end{array}$$

Zadanie 4.3.
Zapisać zagadnienie dualne dla następującego zagadnienia pierwotnego

$$\max_{w\in\mathbb{R}^3} -2w_1 + 3w_2$$
$$\begin{array}{rrrcr} 2w_1 & -1w_2 & -1w_3 & \geqslant & 3 \\ -1w_1 & +1w_2 & -1w_3 & \leqslant & -2 \\ w_1 & & & \geqslant & 0 \\ & w_2 & & \geqslant & 0 \\ & & w_3 & \geqslant & 0 \end{array}$$

Oba zadania rozwiązać metodą sympleksów lub graficzną.

Zadanie 4.4.
Wykorzystując rozwiązanie zadania dualnego (rozwiązać je metodą sympleksów) znaleźć rozwiązanie następującego zadania programowania liniowego

$$\max_{w \in \mathbb{R}^3} 2w_1 + 4w_2$$

$$\begin{array}{rrcr} 3w_1 & +2w_2 & \leqslant & 6 \\ 1w_1 & -1w_2 & \geqslant & -1 \\ -1w_1 & -2w_2 & \geqslant & 1 \end{array}$$

$$\forall i \; w_i \geqslant 0$$

Zadanie 4.5.
Wykorzystując rozwiązanie zadania dualnego (rozwiązać je metodą sympleksów) znaleźć rozwiązanie następującego zadania programowania liniowego

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +2x_2 & \leqslant & 12 \\ 1x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ 2x_1 & & \leqslant & 8 \end{array}$$

$$\forall i \; w_i \geqslant 0$$

Ćwiczenia 5

Zagadnienie transportowe

Zagadnienie transportowe jest szczególnym przypadkiem zagadnienia programowania liniowego. Pozwala znaleźć optymalny rozkład przewozów pomiędzy ustaloną ilością magazynów a odbiorcami przy założeniu, że znany jest koszt przewozu jednej jednostki towaru z danego magazynu do danego odbiorcy.

5.1 Sformułowanie matematyczne

Zagadnienie transportowe można sformułować następująco.

Z m magazynów, w których znajduje się $a_1, \ldots, a_m$ jednostek identycznego towaru należy przesłać odpowiednią ilość towaru do n odbiorców, których zapotrzebowanie wynosi $a_1, \ldots, a_n$. Koszty transportu mają być jak najmniejsze przy założeniu, że koszt przesłania jednej jednostki towaru z i-tego magazynu do j-tego odbiorcy wynosi c_{ij}.

Jeśli przez x_{ij} oznaczymy faktyczną ilość jednostek towaru przesyłanego od magazynu i-tego do odbiorcy j-tego, to otrzymamy następujące sformułowanie zagadnienia transportowego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{m \times n}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5.1}$$

przy ograniczeniach:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \tag{5.2}$$

$$\forall j = 1, 2, \ldots, n \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \tag{5.4}$$

Ponadto zakładamy, że

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5.5}$$

Zauważmy, że w powyższym zadaniu poszukiwane rozwiązanie jest **macierzą** a nie wektorem (jak to było w rozważanych poprzednio zadaniach). Zadanie powyższe można sprowadzić do postaci zadań rozważanych poprzednio poprzez wektoryzację macierzy $X = x_{ij}$ (zapisanie zmiennych jako wektor przepisując jest wierszami z macierzy) i odpowiednią modyfikację postaci ograniczeń.

Dla tego typu zadań opracowano efektywne algorytmy opierające się o rozwiązanie w postaci macierzy (nie wektora).

5.2 Zagadnienie transportowe a zadania całkowitoliczbowe

Zagadnienia transportowe mają bardzo ważną właściwość z punktu widzenia rozwiązania i własności całkowitoliczbowości. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. *Jeśli wszystkie współczynniki zagadnienia transportowego są liczbami całkowitymi, tj.*

$$\forall i \; a_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall j \; a_j \in \mathbb{Z}$$

to optymalne rozwiązanie zagadnienia jest również całkowitoliczbowe, a więc

$$\forall i, j \; \hat{x}_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

5.3 Tablica z rozwiązaniem

Aktualne rozwiązanie zagadnienia transportowego można przedstawić w postaci tablicy

$$\begin{array}{cccc|c}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & \dots & b_n &
\end{array}$$

gdzie suma w wierszach i w kolumnach powinna odpowiednio wynosić a_i lub b_j (liczba za kreskami).

5.4 Metoda kąta północno-zachodniego

Metod ta służy do znalezienia dopuszczalnego rozwiązania początkowego dla zagadnienia transportowego. Algorytm metody jest następujący

1. Podstaw $i = j = 1$
2. Wyznacz
$$x_{ij} = \min \left\{ a_i - \sum_{l<j} x_{il}; b_j - \sum_{k<i} x_{kj} \right\} \tag{5.6}$$
3. Jeśli
$$a_i - \sum_{l<j} x_{il} > b_j - \sum_{k<i} x_{kj}$$
to podstaw $j = j + 1$. W przeciwnym przypadku podstaw $i = i + 1$.
4. Jeśli $i \leqslant m$ oraz $j \leqslant n$ to wróć do kroku 2
5. Pod nieustalone x_{ij} podstaw 0

Przykład 5.4.1.
Znaleźć rozwiązanie początkowe dla zagadnienia transportowego, w którym dane są następujące stany magazynów i zapotrzebowania

$$a_1 = 3, \; a_2 = 4, \; a_3 = 5,$$
$$b_1 = 2, \; b_2 = 2, \; b_3 = 5, \; b_4 = 3$$

Rozwiązanie
Używamy algorytmu kąta północno-zachodniego do znalezienia rozwiązania początkowego

KROK I Rysujemy pustą tablicę początkową

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 3\\ & & & & 4\\ & & & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok II Wybieramy lewą górną wartość jako $\min\{a_1; b_1\} = 2$ i wpisujemy ją do tablicy

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & & & & 3\\ & & & & 4\\ & & & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok III Ponieważ w kolumnie pierwszej liczby sumują się do b_1, to idziemy „w prawo” próbując zapełnić wiersz. Otrzymujemy kolejną tablicę

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3\\ & & & & 4\\ & & & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok IV W kolejnym kroku idziemy „w dół” ponieważ wiersz pierwszy sumuje się już do b_1. Otrzymujemy

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3\\ & 1 & & & 4\\ & & & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok V Kolumna druga jest zapełniona, więc idziemy „w prawo”. Otrzymujemy

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3\\ & 1 & 3 & & 4\\ & & & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok VI Ponieważ ponownie zapełnił się tym razem wiersz, to idziemy „w dół”. Otrzymujemy

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3\\ & 1 & 3 & & 4\\ & & 2 & & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Krok VII Zapełniona jest kolumna trzecia, można iść już tylko „w prawo”. Ostatnia tablica i zarazem rozwiązanie początkowe wygląda następująco

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3\\ & 1 & 3 & & 4\\ & & 2 & 3 & 5\\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Zauważmy, że wiersze sumują się do odpowiednich wartości a_i, a kolumny do odpowiednich wartości b_j. W niewypełnionych miejscach.

Algorytm kąta północno-zachodniego znajduje coś więcej niż tylko rozwiązanie dopuszczalne - znajduje dopuszczalne rozwiązanie **bazowe**, gdzie w bazie znajduje się zawsze $n + m - 1$ zmiennych - niektóre z nich mogą być zerami!.

Przykład 5.4.2.
Znaleźć rozwiązanie początkowe dla zagadnienia transportowego, w którym dane są następujące stany magazynów i zapotrzebowania

$$a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7,$$
$$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 5$$

Rozwiązanie
Używamy algorytmu kąta północno-zachodniego do znalezienia rozwiązania początkowego. Kolejne tablice wyglądają następująco

$$\begin{array}{ccccc|c} & & & & & 4 \\ & & & & & 3 \\ & & & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & 4 \\ & & & & & 3 \\ & & & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & & & & 4 \\ & & & & & 3 \\ & & & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & & & 4 \\ & & & & & 3 \\ & & & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & & & 4 \\ & & 3 & & & 3 \\ & & & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array}$$

Zauważmy, że w obecnej tablicy zarówno drugi wiersz jak i trzecia kolumna sumują się do zadanych ograniczeń a_2 oraz b_3. Przesuwamy się wtedy „w dół” wpisując w kolejnej pozycji 0.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & & & 4 \\ & & 3 & & & 3 \\ & & 0 & & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & & & 4 \\ & & 3 & & & 3 \\ & & 0 & 2 & & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & & & 4 \\ & & 3 & & & 3 \\ & & 0 & 2 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 & \end{array}$$

Otrzymaliśmy więc **zdegenerowane** rozwiązanie początkowe z $m + n - 1 = 7$ zmiennymi bazowymi. Jest to zdegenerowane rozwiązanie bazowe ponieważ przynajmniej jedna ze zmiennych bazowych jest równa 0.

5.5 Schemat algorytmu rozwiązania zagadnienia transportowego

W niniejszej sekcji zakładamy, że mamy już znalezione początkowe dopuszczalne rozwiązanie bazowe. Następujący schemat algorytmu pozwala znaleźć rozwiązanie optymalne

1. Rozwiąż następujący układ równań (gdzie poszukiwane są u_i oraz v_j)

   $$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ dla } i, j \text{ takich, że } x_{ij} \text{ jest bazowe} \tag{5.7}$$

   przy założeniu, że $v_1 = 0$.

2. Oblicz macierz $\bar{c}_{ij}$ daną wzorem
   $$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \tag{5.8}$$

3. Wybierz i, j, dla którego $\bar{c}_{ij}$ jest największe

   $$(k, l) = \arg \max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{\bar{c}_{ij}\} \tag{5.9}$$

4. Jeśli $\bar{c}_{kl} \leqslant 0$ to STOP - znalezione rozwiązanie jest optymalne,

5. Do x_{kl} dodajemy przesył θ, gdzie θ jest maksymalną ilością, jaką możemy dodać przy zachowaniu ograniczeń zadania.

6. Modyfikujemy zmienne x_{ij} dodając lub odejmując θ. Z bazy wychodzi zmienna, która po odjęciu θ zeruje się. Jeśli więcej niż jedna zmienna się zeruje, to z bazy wychodzi ta, dla której c_{ij} jest największe.

7. Powrót do kroku 1

Przykład 5.5.1.
Rozwiąż zagadnie transportowe z następującymi danymi

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_3 = 5,$$
$$b_1 = 2,\ b_2 = 2,\ b_3 = 5,\ b_4 = 3$$

Rozwiązanie
Metodą kąta północno-zachodniego znajdujemy początkowe bazowe rozwiązanie dopuszczalne, jest nim

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & & & 3 \\ & 1 & 3 & & 4 \\ & & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Rozwiązujemy układ równań dany przez (5.7)

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ u_1 + v_1 &= 2 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_2 &= 3 \\ u_2 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_3 &= 5 \\ u_3 + v_4 &= 2 \end{aligned}$$

Otrzymujemy rozwiązanie

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Obliczamy macierz $\bar{c}_{ij}$ i otrzymujemy

$$\bar{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że dla zmiennych bazowych $\bar{c}_{ij} = 0$. Widać, że największe $\bar{c}_{ij}$ jest dla $(i,j) = (3,1)$ Próbujemy dodać do x_{31} liczbę θ, a od zmiennych bazowych odjąć lub dodać θ tak, by ograniczenia pozostały spełnione. Otrzymujemy tablicę z rozwiązaniem

$$\begin{array}{cccc|c} 2^{-\theta} & 1^{+\theta} & & & 3 \\ & 1^{-\theta} & 3^{+\theta} & & 4 \\ {}^{+\theta} & & 2^{-\theta} & 3 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Maksymalna θ jaką możemy dodać to $\theta = 1$ ponieważ po jej odjęciu od x_{22} dostaniemy 0. Ta zmienna również wyjdzie z bazy. Do bazy wejdzie natomiast x_{31}. Otrzymujemy więc następujące bazowe rozwiązanie dopuszczalne

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & & 3 \\ & & 4 & & 4 \\ 1 & & 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

Ponownie rozwiązujemy układ równań (5.7) postaci

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ u_1 + v_1 &= 2 \\ u_1 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_1 &= 5 \\ u_3 + v_3 &= 5 \\ u_3 + v_4 &= 2 \\ u_2 + v_2 &= 3 \end{aligned}$$

Otrzymujemy rozwiązanie

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Macierz $\bar{c}_{ij}$ jest następująca

$$\bar{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ wszystkie $\bar{c}_{ij} \leqslant 0$ to Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

5.6 Algorytm rozwiązania zagadnienia transportowego – metoda szybkiego zapisu

Zauważmy, że w poprzednio podawanej metodzie rozwiązania w każdym kroku występowały dwie ważne tablice – tablica z aktualnym rozwiązaniem x_{ij} oraz tablica cen zredukowanych $\bar{c}_{ij}$. Zauważmy ponadto, że jeśli dana zmienna była bazowa, to jej cena $\bar{c}_{ij}$ była równa 0. Umożliwia to zapisanie tych dwóch tablic w jednej tablicy.

Przykład 5.6.1.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 8,\ a_2 = 6,\ a_3 = 10$$

$$b_1 = 6,\ b_2 = 4,\ b_3 = 6,\ b_4 = 8$$

Rozwiązanie
Stosując metodę kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

6	2			8
	2	4		6
		2	8	10
6	4	6	8	

Następnie rysujemy tabelę, która jednocześnie pozwala rozwiązać układ równań na u_i oraz v_j, zawiera w sobie wartości x_{ij} oraz $\bar{c}_{ij}$. Proces tworzenia tabeli zaczynamy od wpisania do niej zmiennych bazowych.

$u_i \backslash v_j$				
	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Dla odróżnienia zmiennych bazowych od cen $\bar{c}_{ij}$ w powyższej tablicy, zmienne bazowe zakreślono kwadratami.

Kolejnym etapem w danym kroku jest rozwiązanie układu równań na u_i oraz v_j. Poszczególne u_i wpisywane będą w pierwszej kolumnie powyższej tabeli, natomiast kolejne v_j będąwpisywane w pierwszym wierszu tabeli. Zgodnie z algorytmem przyjmujemy $v_1 = 0$, a więc wpisujemy tą wartość do tabeli i otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0			
	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Ponieważ x_{11} jest zmienną bazową, to możemy obliczyć u_1 ponieważ $u_1 + v_1 = c_{11} = 5$.

Uwaga! Najczęstszym błędem popełnianym przy rozwiązywaniu tego typu zadań jest przyjmowanie $u_i + v_j = x_{ij}$ a nie c_{ij}!

Uzupełniamy tablicę o kolejną wartość

$u_i \backslash v_j$	0			
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Ponownie ponieważ x_{12} jest zmienną bazową, to można obliczyć v_2 z równania $u_1 + v_2 = c_{12} = 7$. Otrzymujemy kolejną wartość w tablicy

$u_i \backslash v_j$	0	2		
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Teraz z kolei można obliczyć u_2 z równania $u_2 + v_2 = c_{22} = 6$; otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	2		
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
4		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Teraz można już obliczyć v_3 z równania $u_2 + v_3 = c_{23} = 1$; uzupełniamy tablicę i otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
4		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Można już obliczyć u_3 z równania $u_3 + v_3 = c_{33} = 3$; znów uzupełniamy tablicę

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
4		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
6			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Pozostaje już tylko obliczyć v_4 z równania $u_3 + v_4 = c_{34} = 4$ i dostajemy ostateczną tablicę z obliczonymi u_i oraz v_j

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	-2
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
4		$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	
6			$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Następnym etapem jest obliczenie wszystkich $\bar{c}_{ij}$. Uzupełnione zostaną puste elementy tablicy wg wzoru (5.8). Elementy te łatwo obliczyć, bo jest to zawsze suma wartości z pierwszego wiersza w danej kolumnie oraz wartości z pierwszej kolumny w danym wierszu. Od tej sumy należy jeszcze odjąć odpowiedni koszt c_{ij} z macierzy kosztów danej w zadaniu.

Zauważmy, że w miejscach, w których wpisane są wartości zmiennych bazowych wartość $\bar{c}_{ij}$ jest równa 0. Dlatego nie trzeba ich ani obliczać ani uzupełniać. Pozostałe wartości $\bar{c}_{ij}$ wpisujemy do tablicy i otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	-2
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	0	-1
4	-2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	-6
6	5	6	$\boxed{2}$	$\boxed{8}$

Największa wartość $\bar{c}_{ij}$ znajduje się w trzecim wierszu i drugiej kolumnie tabeli. A więc zmienna x_{32} wejdzie do bazy (w obecnym rozwiązaniu $x_{32} = 0$). Próbujemy na tej pozycji dodać wartość θ i tak zmodyfikować pozostałe zmienne bazowe, aby jedna z nich wyszła z bazy i zachowane zostały ograniczenia (w danej kolumnie lub wierszu jeśli wystąpi $+\theta$ to musi również wystąpić $-\theta$, oprócz pozycji odpowiadającej zmiennej wprowadzanej do bazy znaczniki $+\theta$ oraz $-\theta$ mogą się pojawić **tylko** na pozycjach odpowiadających zmiennym bazowym).

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	-2
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	0	-1
4	-2	$\boxed{2}^{-\theta}$	$\boxed{4}^{+\theta}$	-6
6	5	$6^{+\theta}$	$\boxed{2}^{-\theta}$	$\boxed{8}$

$\theta = 2.$

Widać, że maksymalna θ jaką możemy dodać do x_{32} wynosi 2 ponieważ jest to najmniejsza z wartości zmiennych bazowych którym przypisano znacznik $-\theta$.

Modyfikowana jest tablica i powtarzany jest krok metody. Zauważmy, że w tym przypadku po odjęciu θ od zmiennych bazowych, dwie z nich (x_{22} oraz x_{33}) zostaną wyzerowane. Zgodnie z algorytmem tylko jedna zmienna może wyjść z bazy, druga w niej pozostanie z wartością równą 0 (rozwiązanie zdegenerowane). Zmienną, która wyjdzie z bazy jest ta, która ma większą wartość c_{ij} czyli x_{22}.

Kolejna tabela po modyfikacji zmiennych bazowych wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$				
	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$		
			$\boxed{6}$	
		$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$

Uzupełniamy wartości u_i oraz v_j oraz $\bar{c}_{ij}$ i otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	2	3	4
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	6	5
-2	-8	-6	$\boxed{6}$	-6
0	-1	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$

Z powyższej tablicy widać, że największa dodatnia wartość $\bar{c}_{ij}$ znajduje się na pozycji odpowiadającej zmiennej x_{13}. Próbujemy dodać do tej zmiennej θ i otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	2	3	4
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}^{-\theta}$	$6^{+\theta}$	5
-2	-8	-6	$\boxed{6}$	-6
0	-1	$\boxed{2}^{+\theta}$	$\boxed{0}^{-\theta}$	$\boxed{8}$

$\theta = 0$

Jak widać w tym przypadku wartości zmiennych nie zmienią się, jedynie zmieni się zestaw zmiennych bazowych (zmienna x_{33} wyjdzie z bazy, a zmienna x_{13} do niej wejdzie, choć przyjmie wartość 0).

Otrzymujemy kolejną tablicę. W rozwiązaniu zadania wystarczy podawać właśnie taką tablicę podsumowującą wszystkie trzy etapy w danym kroku (uzupełnienie zmiennych bazowych, obliczenie u_i oraz v_j, a także wyznaczenie $\bar{c}_{ij}$ oraz θ).

$u_i \backslash v_j$	0	2	-3	4
5	$\boxed{6}$	$\boxed{2}^{-\theta}$	$\boxed{0}$	$5^{+\theta}$
4	-2	0	$\boxed{6}$	0
0	-1	$\boxed{2}^{+\theta}$	-6	$\boxed{8}^{-\theta}$

$\theta = 2$

W kolejnym kroku otrzymujemy

$u_i \backslash v_j$	0	-3	-3	-1
5	$\boxed{6}^{-\theta}$	-5	$\boxed{0}$	$\boxed{2}^{+\theta}$
4	-2	-5	$\boxed{6}$	-5
5	$4^{+\theta}$	$\boxed{4}$	-1	$\boxed{6}^{-\theta}$

$\theta = 6$

Po kolejnym przekształceniu otrzymujemy tablicę

$u_i \backslash v_j$	0	1	2	4
0	-5	-6	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$
-1	-7	-6	$\boxed{6}$	-5
1	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	0	$\boxed{0}$

KONIEC – ponieważ wszystkie $\bar{c}_{ij} \leqslant 0$ to znalezione rozwiązanie jest (zdegenerowanym) rozwiązaniem optymalnym.

Odpowiedź
Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a całkowity, optymalny koszt transportu wynosi

$$c = 8c_{14} + 6c_{33} + 6c_{31} + 4c_{32} = 32 + 6 + 6 + 8 = 52$$

Przykład 5.6.2.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7$$
$$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 5,\ b_4 = 6$$

Rozwiązanie
Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 5 & 6 & \end{array}$$

KROK I Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	-4	-5	-2
7	$\boxed{2}^{-\theta}$	$\boxed{1}^{+\theta}$	-2	2
6	-1	$\boxed{0}^{-\theta}$	$\boxed{4}^{+\theta}$	-2
7	$4^{+\theta}$	2	$\boxed{1}^{-\theta}$	$\boxed{6}$

$\theta = 0$

KROK II Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	-4	-1	2
7	$\boxed{2}^{\,-\theta}$	$\boxed{1}$	2	$6^{\,+\theta}$
2	-5	-4	$\boxed{4}$	-2
3	$\boxed{0}^{\,+\theta}$	-2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}^{\,-\theta}$

$\theta = 2$

Krok III Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	2	-1	2
1	-6	$\boxed{1}^{\,-\theta}$	-4	$\boxed{2}^{\,+\theta}$
2	-5	2	$\boxed{4}$	-2
3	$\boxed{2}$	$4^{\,+\theta}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}^{\,-\theta}$

$\theta = 1$

Krok IV Kolejna tablica wygląda następująco

$u_i \backslash v_j$	0	-2	-1	2
1	-6	-4	-4	$\boxed{3}$
2	-5	-2	$\boxed{4}$	-2
3	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź
Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 37$

5.7 Postępowanie w przypadkach gdy zapotrzebowanie jest różne od stanu w magazynach

Do tej pory zakładaliśmy, że zachodzi

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.10}$$

Jeśli powyższy warunek nie jest spełniony w danym zadaniu, to należy dodać albo jedną kolumnę albo jeden wiersz w danych zadania z kosztem transportu równym 0 i odpowiednim zapotrzebowaniem bądź stanem magazynu.

Jeśli zachodzi $sum_{i=1}^{m} a_i > sum_{j=1}^{n} b_j$ to należy zadanie rozszerzyć o jedną kolumnę. Wtedy tablica zmiennych i tablica kosztów wyglądają następująco

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & x_{mn+1} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & \dots & b_n & \sum_i a_i - \sum_j b_j &
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli zachodzi $sum_{i=1}^{m} a_i < sum_{j=1}^{n} b_j$ to należy zadanie rozszerzyć o jeden wiersz. Wtedy tablica zmiennych i tablica kosztów wyglądają następująco

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\
x_{m+1,1} & x_{m+1,2} & \dots & x_{m+1,n} & \sum_j b_j - \sum_i a_i \\
\hline
b_1 & b_2 & \dots & b_n &
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \\
0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
$$

Po przekształceniu obu tablic dalej należy zadanie rozwiązywać zgodnie z opisywanym wcześniej algorytmem.

Przykład 5.7.1.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$
c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$a_1 = 8,\ a_2 = 6,\ a_3 = 10$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 6,\ b_4 = 8$$

Rozwiązanie
Ponieważ w zadaniu $\sum_{i=1}^{3} > \sum_{j=1}^{4} b_j$, to należy dodać jedną kolumnę do zadania z

$$b_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 4.$$

Mamy następujące dane

$$
c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$a_1 = 8,\ a_2 = 6,\ a_3 = 10$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 6,\ b_4 = 8,\ b_5 = 4$$

Dalej postępujemy zgodnie z typowym algorytmem. Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 10 \\
\hline
2 & 4 & 6 & 8 & 4 &
\end{array}
$$

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$$
\begin{array}{c|ccccc}
u_i \backslash^{v_j} & 0 & 2 & -3 & 4 & 0 \\
\hline
5 & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{2}^{\,-\theta} & 5 & 5^{\,+\theta} \\
4 & -2 & 0 & \boxed{4}^{\,+\theta} & \boxed{2}^{\,-\theta} & 4 \\
0 & -1 & 0 & -6 & \boxed{6}^{\,+\theta} & \boxed{4}^{\,-\theta}
\end{array}
\qquad \theta = 2
$$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|ccccc}
u_i \backslash ^{v_j} & 0 & 2 & -3 & -1 & -5 \\
\hline
5 & \boxed{2} & \boxed{4}^{-\theta} & \boxed{0} & 0 & \boxed{2}^{+\theta} \\
4 & -2 & 0 & \boxed{6} & -5 & -1 \\
5 & 4 & 5^{+\theta} & -1 & \boxed{8} & \boxed{2}^{-\theta}
\end{array} \qquad \theta = 2$$

Krok III Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|ccccc}
u_i \backslash ^{v_j} & 0 & 2 & -3 & 4 & -5 \\
\hline
5 & \boxed{2} & \boxed{2}^{-\theta} & \boxed{0} & 5^{+\theta} & \boxed{4} \\
4 & -2 & 0 & \boxed{6} & 0 & -1 \\
0 & -1 & \boxed{2}^{+\theta} & -6 & \boxed{8}^{-\theta} & -5
\end{array} \qquad \theta = 2$$

Krok IV Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|ccccc}
u_i \backslash ^{v_j} & 0 & -3 & -3 & -1 & -5 \\
\hline
5 & \boxed{2}^{-\theta} & -5 & \boxed{0} & \boxed{2}^{+\theta} & \boxed{4} \\
4 & -2 & -5 & \boxed{6} & -5 & -1 \\
5 & 4^{+\theta} & \boxed{4} & -1 & \boxed{6}^{-\theta} & 0
\end{array} \qquad \theta = 2$$

Krok V Kolejna tablica wygląda następująco

$$\begin{array}{c|ccccc}
u_i \backslash ^{v_j} & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\
\hline
1 & -4 & -5 & \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{4} \\
0 & -6 & -5 & \boxed{6} & -5 & -1 \\
1 & \boxed{2} & \boxed{4} & -1 & \boxed{4} & 0
\end{array}$$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź

Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 48$

Przykład 5.7.2.

Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,$$

$$b_1 = 3,\ b_2 = 3,\ b_3 = 5,\ b_4 = 3$$

Rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu $\sum_{i=1}^{3} < \sum_{j=1}^{4} b_j$, to należy dodać jeden wiersz do zadania z

$$a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 1.$$

Mamy następujące dane

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,\ a_4 = 1$$

$$b_1 = 3,\ b_2 = 3,\ b_3 = 5,\ b_4 = 3$$

Metodą kąta północno-zachodniego otrzymujemy rozwiązanie początkowe

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 3 & 3 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
3 & 3 & 5 & 3 &
\end{array}
$$

Krok I Kolejna tablica wygląda następująco

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 6 & 1 & 0 \\
\hline
3 & \boxed{2} & 2 & -4 & -3 \\
2 & \boxed{1} & \boxed{3}^{-\theta} & \boxed{3}^{+\theta} & -5 \\
1 & -3 & 4 & \boxed{2}^{-\theta} & \boxed{2}^{+\theta} \\
0 & 0 & 6^{+\theta} & 1 & \boxed{1}^{-\theta}
\end{array}
\qquad \theta = 1
$$

Krok II Kolejna tablica wygląda następująco

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 6 & 1 & 0 \\
\hline
3 & \boxed{2} & 2 & -4 & -3 \\
2 & \boxed{1} & \boxed{2}^{-\theta} & \boxed{4}^{+\theta} & -5 \\
1 & -3 & 4^{+\theta} & \boxed{1}^{-\theta} & \boxed{3} \\
-6 & -6 & \boxed{1} & -5 & -6
\end{array}
\qquad \theta = 1
$$

Krok III Kolejna tablica wygląda następująco

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 6 & 1 & 4 \\
\hline
3 & \boxed{2}^{-\theta} & 2^{+\theta} & -4 & 1 \\
2 & \boxed{1}^{+\theta} & \boxed{1}^{-\theta} & \boxed{5} & -1 \\
-3 & -7 & \boxed{1} & -4 & \boxed{3} \\
-6 & -6 & \boxed{1} & -5 & -2
\end{array}
\qquad \theta = 1
$$

Krok IV Kolejna tablica wygląda następująco

$$
\begin{array}{c|cccc}
{}_{u_i}\backslash^{v_j} & 0 & 4 & 1 & 2 \\
\hline
3 & \boxed{1} & \boxed{1} & -4 & -1 \\
2 & \boxed{2} & -2 & \boxed{5} & -3 \\
-1 & -5 & \boxed{1} & -2 & \boxed{3} \\
-4 & -4 & \boxed{1} & -3 & -2
\end{array}
$$

Koniec – znaleziono rozwiązanie optymalne.

Odpowiedź

Optymalny rozkład towaru w danym zagadnieniu przedstawia następująca tablica

$$
\hat{x}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

Natomiast koszt całkowity transportu wynosi $\hat{c} = 35$

5.8 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.1.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 & 8 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 7 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 5,\ a_2 = 7,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1$$

$$b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2,\ b_5 = 3$$

Zadanie 5.2.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7$$

$$b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 9,\ b_4 = 3,\ b_5 = 2$$

Zadanie 5.3.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 3,\ b_5 = 2$$

Zadanie 5.4.
Znaleźć optymalny rozkład produktów w zagadnieniu transportowym przy następujących danych

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 7,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 3$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 5,\ b_3 = 6,\ b_4 = 8,\ b_5 = 3$$

Ćwiczenia 6

Kolokwium 1

[1]

6.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.1.
Wytwórca mebli chce określić, ile stołów, krzeseł, biurek lub szaf bibliotecznych powinien produkować, aby optymalnie wykorzystać dostępne środki. Do produkcji wykorzystuje się dwa typy desek. Wytwórca posiada 1500 m pierwszego typu desek i 1000 m drugiego. Dysponuje kapitałem 860 godzin roboczych na wykonanie całej pracy. Przewidywane zapotrzebowanie plus potwierdzone zamówienia wymagają wykonania co najmniej 40 stołów, 130 krzeseł, 30 biurek i nie więcej niż 10 szaf bibliotecznych. Każdy stół, krzesło, biurko i szafa biblioteczna wymaga odpowiednio 5, 1, 9 i 12 m desek pierwszego typu oraz 2, 3, 4 i 1 m desek drugiego typu. Na wykonanie stołu potrzebne są trzy godziny pracy, krzesła 2 godziny, biurka 5 godzin i szafy bibliotecznej 10 godzin. Przy sprzedaży jednego stołu, krzesła, biurka i szafy bibliotecznej wytwórca osiąga zysk odpowiednio 12 dolarów, 5 dolarów, 15 dolarów i 10 dolarów. Sformułować i rozwiązać zagadnienie programowania liniowego - maksymalizacji zysku.

Zadanie 6.2.
Dane jest następujące Zagadnienie Programowania Liniowego

$$\max f(x) = \frac{1}{\alpha}x_1 + \frac{1}{\beta}x_2 \tag{6.1}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha, \beta > 0$ przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + x_2 &\leqslant 4 && (6.2)\\ -2x_1 + x_2 &\geqslant -6 && (6.3)\\ x_i &\geqslant 0,\ i = 1, 2 && (6.4) \end{aligned}$$

- Wykorzystując metodę graficzną rozwiązywania zagadnień programowania liniowego wyznacz rozwiązanie optymalne danego zagadnienia w zależności od parametrów α oraz β.

- Dla jakich wartości tych parametrów ilość rozwiązań ZPL będzie nieskończona?

Zadanie 6.3.
Dane jest następujące Zagadnienie Programowania Liniowego

$$\max f(x) = \frac{1}{3}x_1 + x_2 \tag{6.5}$$

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

przy ograniczeniach

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leqslant 4 \tag{6.6}$$
$$-2x_1 + x_2 \geqslant -6 \tag{6.7}$$
$$x_1 + x_2 \leqslant \alpha \tag{6.8}$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2 \tag{6.9}$$

gdzie $\alpha \geqslant 0$ jest pewnym parametrem. Dla jakich wartości parametru α zagadnienie to posiada co najmniej jedno zdegenerowane rozwiązanie bazowe (niekoniecznie optymalne)? Podaj uzyskane rozwiązania zdegenerowane.

Zadanie 6.4.
Dane jest następujące Zagadnienie Programowania Liniowego

$$\max f(x) = 2x_1 + 3x_2 \tag{6.10}$$

przy ograniczeniach

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leqslant 4 \tag{6.11}$$
$$-2x_1 + x_2 \geqslant -6 \tag{6.12}$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 4 \tag{6.13}$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2 \tag{6.14}$$

Należy to zadanie rozwiązać (uwaga! Występuje nieoptymalne zdegenerowane rozwiązanie bazowe).

Zadanie 6.5.
Rozwiązać następujące zagadnienie optymalizacyjne (przekształcić do zagadnienia programowania liniowego i rozwiązać metodą sympleksów)

$$\max f(x) = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \tag{6.15}$$

przy ograniczeniach

$$x_2 \leqslant 5 \tag{6.16}$$
$$-2x_1 + x_2 \leqslant 3 \tag{6.17}$$
$$|x_1 - 2| \leqslant x_2 \tag{6.18}$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2 \tag{6.19}$$

Ćwiczenia 7

Programowanie nieliniowe - dowody lematów

[1]

Lemat 7.1. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym zbiorem wypukłym. Załóżmy, że $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ jest wypukła, wówaczas funkcja f jest ciągła.*

Lemat 7.2. *Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną oraz zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Wówczas funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall x, x^0 \in X \quad f(x) \geqslant f(x^0) + < \nabla f(x^0), x - x^0 > \tag{7.1}$$

gdzie $\nabla f(x^0)$ oznacza gradient funkcji f w punkcie x^0. Jeśli powyższa nierówność jest ostra dla dowolnych $x, x^0 \in X$, to funkcja f jest ściśle wypukła i odwrotnie.

Dowód. Wynikanie $\Longrightarrow$. Niech $\lambda \in [0,1]$ oraz $h = x - x^0$. Ponieważ X jest wypukły, to

$$x^0 + \lambda h = x^0 + \lambda(x - x^0) = \lambda x + (1-\lambda)x^0 \in X \tag{7.2}$$

Korzystając z wypukłości funkcji f

$$f(x^0 + \lambda h) = f(\lambda x + (1-\lambda)x^0) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x^0) \tag{7.3}$$

odejmując od obu stron wyrażenie $\lambda < \nabla f(x^0), h >$ i dzieląc obie strony równania (7.3) przez λ oraz przenosząc jeden wyraz na drugą stronę otrzymujemy

$$\frac{f(x^0 + \lambda h) - f(x^0) - \lambda < \nabla f(x^0), h >}{\lambda} \leqslant f(x) - f(x^0) - \lambda < \nabla f(x^0), h > \tag{7.4}$$

Z założenia f jest różniczkowalna, więc gdy $\lambda \to 0^+$, to lewa strona (7.4) dąży do zera. Ty samym prawa strona staje się równoważna dowodzonej zależności (7.1).

Wynikanie $\Longleftarrow$. Załóżmy, że nierówność (7.1) zachodzi dla dowolnych $x^0, x \in X$. Niech $x^1, x^2 \in X$ przy czym $x^1 \neq x^2$ oraz niech $0 < \lambda < 1$. Podstawmy

$$x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \quad h = x^1 - x^0 \tag{7.5}$$

zatem

$$x^2 = x^0 - \frac{\lambda}{1-\lambda} h \tag{7.6}$$

lecz z (7.1) mamy

$$f(x^1) \geqslant f(x^0) + < \nabla f(x^0), h > \tag{7.7}$$

oraz

$$f(x^2) \geqslant f(x^0) + < \nabla f(x^0), h > \frac{-\lambda}{1-\lambda} \tag{7.8}$$

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

Mnożąc (7.7) przez $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ oraz dodając do (7.8), otrzymujemy

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} f(x^1) + f(x^2) \geqslant \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} + 1\right) f(x^0) \tag{7.9}$$

lub

$$\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \geqslant f(x^0) \tag{7.10}$$

Dla $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ powyższa nierówność jest automatycznie spełniona. Oznacza to, że f jest wypukła. □

Lemat 7.3. *Niech $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ ma ciągłe pochodne cząstkowe oraz niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej hesjan $A(x)$ jest dodatnio półokreślony dla każdego $x \in X$.*

Dowód. Niech będa danedowolnie wybrane $x^0, x \in X$. Oznaczmy $h = x - x^0$. Poniewaz X jest wypukły, więc $x^0 + \lambda h \in X$ dla każdego $\lambda \in [0,1]$. Wynikanie $\Longleftarrow$. Załóżmy, że hesjan jest dodatnio półokreślony. Rozwijając funckję f w szereg Taylora dla pewnego $\lambda \in [0,1]$ mamy

$$f(x) = f(x^0) + < \nabla f(x^0), h > + \frac{1}{2} < h, A(x^0 + \lambda h) h > \tag{7.11}$$

Z założenia o dodatniej półokreśloności macierzy $A(y)$, dla każdego $y \in X$ wynika, że trzeci wyraz w (7.11) jest nieujemny, a zatem

$$f(x) \geqslant f(x^0) + < \nabla f(x^0), h >= f(x^0) + < \nabla f(x^0), x - x^0 >, \quad \forall x, x^0 \in X. \tag{7.12}$$

Korzystając z lematu 7.2 widzimy, że (7.12) jest spełnione tylko wtedy, gdy funkcja f jest wypukła.

Wynikanie $\Longrightarrow$. Załóżmy, teraz, że funkcja f jest wypukła. Dowód niewprost. Prszyjmijmy, że istnieją $x^0 \in X$ i $h \in \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\left\langle h, A(x^0) h \right\rangle < 0 \tag{7.13}$$

Z ciągłości drugich pochodnych wynika, że funkcja

$$\langle h, A(y) h \rangle \tag{7.14}$$

jest ciągła dla każdego $y \in Y$. Można zatem utworzyć kulę $B_\delta(x^0) \subset X$ wokół x^0 o prmieniu $\delta > 0$ taką, że

$$\langle h, A(y) h \rangle < 0, \quad \forall y \in B_\delta(x^0) \tag{7.15}$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak dobrane, aby

$$x = (x^0 + \varepsilon h) \in B_\delta(x^0) \tag{7.16}$$

Podstawiając $h' = \varepsilon h$ oraz stosując rozwinięcie (7.11) mamy

$$f(x) + f(x^0) + \left\langle \nabla f(x^0), h' \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle h', A(x^0 + \lambda h'), h' \right\rangle \tag{7.17}$$

dla pewnego $\lambda \in [0,1]$.

Zauważmy, że $||\lambda h'|| = ||\lambda \varepsilon h|| = |\lambda| ||\varepsilon h|| \leqslant \delta$, a więc

$$x^0 + \lambda h' \in B_\delta(x^0) \tag{7.18}$$

Wynika stąd, że

$$\frac{1}{2} \left\langle h', A(x^0 + \lambda h') h' \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left\langle h. A(x^0 + \lambda h') h \right\rangle < 0 \tag{7.19}$$

a zatem

$$f(x) < f(x^0) + \left\langle \nabla f(x^0), h' \right\rangle = f(x^0) + \left\langle \nabla f(x^0), x - x^0 \right\rangle \tag{7.20}$$

co jest sprzeczne z założeniem o wypukłości funkcji f (lemat 7.2). Wynika z tego, że jest funkcja f jest wypukła, to macierz $A(x)$ jest dodatnio półokreślona dla każdego $x \in X$. □

Lemat 7.4. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Jeśli funkcje $f_i \colon X \to \mathbb{R}^1$, dla $i = 1, \ldots, k$, są funkcjami wypukłymi oraz jeśli wielkości skalarne $\alpha_i \geqslant 0$ dla $i = 1, \ldots, k$, to funkcja*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) \tag{7.21}$$

jest wypukła.

Dowód. Niech będą dowolnie wybrane $x^1, x^2 \in X$ oraz $\lambda \in [0, 1]$. Z Założenia funkcje f_i są wypukłe oraz $\alpha_i \geqslant 0$, więc

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[\lambda f_i(x^1) + (1-\lambda) f_i(x^2)\right] \tag{7.22}$$

Zapisując to w innej postaci, mamy

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x^1) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} f_i(x^2) = \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \tag{7.23}$$

a to oznacza, że f jest wypukła. □

Lemat 7.5. *Niech funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}^1, X \subset \mathbb{R}^n$ będzie funkcją wypukłą, wówczas dla dowolnego rzeczywistego ustalonego α zbiór*

$$X_\alpha = \{x \colon f(x) \leqslant \alpha\} \tag{7.24}$$

jest wypukły.

Dowód. Niech $x^1, x^2 \in X_\alpha$, a zatem

$$f(x^1) \leqslant \alpha \quad \text{oraz} \quad f(x^2) \leqslant \alpha \tag{7.25}$$

Z założenia funkcja f jest wypukła, więc dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ mamy

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha \tag{7.26}$$

Wynika stąd, że dla dowolnych $x^1, x^2 \in X_\alpha$, punkt $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_\alpha$, a więc zbiór X_α jest wypukły. □

Definicja 7.1. *Niech $f \colon X \to \mathbb{R}^1$ będzie funkcją różniczkowalną oraz niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcję f nazywamy* ***pseudowypukłą****, jeżeli dla dowolnych $x, x^0 \in X$ z nierówności*

$$\left\langle \nabla f(x^0), x - x^0 \right\rangle \geqslant 0 \tag{7.27}$$

wynika, że

$$f(x) \geqslant f(x^0) \tag{7.28}$$

Definicja 7.2. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funckję $f \colon X \to \mathbb{R}$ nazywamy* ***quasi-wypukłą****, jesli dla dowolnych $x^1, x^2 \in X$ oraz dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ jest spełniony warunek*

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \max\left[f(x^1), f(x^2)\right] \tag{7.29}$$

Lemat 7.6. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest quasi-wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór*

$$X_\alpha = \{x \colon f(x) \leqslant \alpha\} \tag{7.30}$$

hest wypukły dla dowolnej rzeczywistej liczby α.

Dowód. Wynikanie $\Longrightarrow$. Niech dla ustalonego α będą dane dwa punkty $x^1, x^2 \in X$, a zatem

$$f(x^1) \leqslant \alpha \quad \text{oraz} \quad f(x^2) \leqslant \alpha \tag{7.31}$$

Załóżmy, że funkcja f jest quasi-wypukła, a więc

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \max\left[f(x^1), f(x^2)\right] \quad \forall \lambda \in [0, 1] \tag{7.32}$$

Korzystając z (7.31), powyższy związek możemy zapisać w postaci

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \alpha \tag{7.33}$$

a zatem

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_\alpha \tag{7.34}$$

Oznacza to, że X_α jest wypukły.

Wynikanie $\Longleftarrow$. Załóżmy, że X_α jest wypukły dla dowolnej liczby α. Niech $x^1, x^2 \in X_\alpha$ będą dowolnie dobranymi punktami takimi, że

$$f(x^1) \leqslant f(x^2) \tag{7.35}$$

Ustalmy

$$\alpha = f(x^2) \tag{7.36}$$

Z założenia o wypukłości mamy

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_\alpha \tag{7.37}$$

Z równań (7.35) oraz (7.36) wynika, że

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \alpha = max\left[f(x^1), f(x^2)\right] \tag{7.38}$$

co należało dowieść. □

Ćwiczenia 8

Programowanie nieliniowe - Warunki Kuhna-Tuckera

[1]

8.1 Postać standardowa Zagadnienia Programowania Nieliniowego

Podobnie, jak to miało miejsce w przypadku zadań programowania liniowego, również dla zagadnień programowania nieliniowego (z ograniczeniami nierównościowymi) wprowadza się postać standardową zadania, do której każde zagadnienie może być sprowadzone.

Standardowa postać Zagadnienia Programowania Nieliniowego jest następująca

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{8.1}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{8.2}$$

gdzie f oraz g_i są pewnymi nieliniowymi funkcjami.

8.2 Warunki konieczne optymalności ZPN

Twierdzenie 8.1. *Jeśli w Zagadnieniu Programowania Nieliniowego*

1. *funkcje f i g_i są różniczkowalne,*
2. *$\hat{x}$ jest lokalnym minimum tego zadania,*

to istnieje $\hat{\lambda} \geqslant 0$, $dim\hat{\lambda} = m$, takie, że

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0 \tag{8.3}$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{8.4}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_2(\hat{x}) = \emptyset \tag{8.5}$$

Twierdzenie 8.2. *Jeśli w Zagadnieniu Programowania Nieliniowego*

1. *funkcje f i g_i są różniczkowalne*

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

2. funkcja f jest funkcją pseudowypukłą, ograniczenia g_i są zaś funkcjami quasi-qypukłymi,

3. w $\hat{x} \in X_0$ spełnione są warunki Kuhna-Tuckera (8.3) *i* (8.4)*,*

to punkt $\hat{x}$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania programowania nieliniowego.

Definicja 8.1. *Funkcją Lagrange'a Zadania Programowania Nieliniowego nazywamy skalarną funckję*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda,\, g(x) \rangle = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{8.6}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem mnożników Lagrange'a.

Lemat 8.1 (Farkasa)**.** *Niech będzie dany w $\mathbb{R}^n$ zbiór n-wymiarowych wektorów $\{b, a^i, i = 1, \ldots, m\}$. Nierówność*

$$\langle b,\, x \rangle \geqslant 0 \tag{8.7}$$

zachodzi dla każdego $x \in \mathbb{R}$, spełniającego

$$\left\langle -a^i,\, x \right\rangle \geqslant 0 \tag{8.8}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]^T \geqslant 0$ taki, że

$$b + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i = 0 \tag{8.9}$$

Dowód. (za [1]) Załóżmy najpierw, że (8.9) zachodzi. Mnożąc (8.9) przez x (mnożenie w sensie iloczynu skalarnego) i korzystając z rozdzielności iloczynu skalaranego względem dodawania, dostajemy

$$\langle b,\, x \rangle + \sum_{i=1}^{m} \left\langle \lambda_i a^i,\, x \right\rangle = 0 \tag{8.10}$$

Ponownie korzystając z własności iloczynu skalarnego (o wyciąganiu wartości stałej przed iloczyn skalarny) i przenosząc na drugą stronę równania, otrzymujemy

$$\langle b,\, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left\langle -a^i,\, x \right\rangle \tag{8.11}$$

skąd dla każdego x spełniającego (8.8) otrzymujemy wprost

$$\langle b,\, x \rangle \geqslant 0 \tag{8.12}$$

Dowód w drugą stronę. Załóżmy teraz, że obowiązują (8.7) i (8.8). Niech dany będzie wielościenny stożek wypukły C wygenerowany przez zbiór wektorów $-a^1, -a^2, \ldots, -a^m$. Zauważmy, że stożek taki będzie *domknięty*. Utwórzmy stożek sprzężony (dualny) $S(C)$ ze stożkiem C, a mianowicie:

$$S(C) = \left\{x\colon \left\langle -a^i,\, x \right\rangle \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\right\} \tag{8.13}$$

Z założenia wynika, że $b \in S(S(C))$, tzn wektor b zawarty jet w stożku dualnym o $S(C)$. Można wykazać, że jeśli $C \subset \mathbb{R}^n$ jest *domkniętym stożkiem wypukłym*, to

$$S(S(C)) = C \tag{8.14}$$

Korzystając z tej właściwości otrzymujemy

$$b \in C \tag{8.15}$$

a ponieważ dowolny element stożka C może być zapisany w postaci:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(-a^i), \quad \text{dla } \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{8.16}$$

to tym samym wykazaliśmy słuszność (8.9), co kończy dowód. □

Twierdzenie 8.3. *Niech dana będzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poprzez formę kwadratową postaci*

$$f(x) = x^T Qx + Rx \tag{8.17}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem, natomiast $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz $R \in \mathbb{R}^{1\times n}$ pewnymi macierzami, to funkcja f jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Q jest dodatnio określona.

Twierdzenie 8.4. *Niech dana będzie macierz kwadratowa $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Następujące warunki są równoważne*

1. *Macierz Q jest dodatnio określona,*
2. *Dla każdego wektora $d \in \mathbb{R}^n$ zachodzi*
$$d^T Qd \geqslant 0$$
3. *Wszystkie wartości własne macierzy Q mają nieujemne części rzeczywiste,*
4. *Wszystkie minory główne macierzy Q są nieujemne,*

Inna postać warunków optymalności zapisanych z użyciem funkcji Lagrange'a

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{(\hat{x},\hat{\lambda})} = 0 \quad i = 1,\dots,m \tag{8.18}$$

$$\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) = 0 \quad i = 1,\dots,m \tag{8.19}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right|_{(\hat{x},\hat{\lambda})} \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow g_i(\hat{x}) \leqslant 0 \quad i = 1,\dots,m \tag{8.20}$$

$$\hat{\lambda}_i \geqslant 0 \quad i = 1,\dots,m \tag{8.21}$$

Przykład 8.2.1.
Monopolista może zakupić do 17.25 litra chemikaliów za 10\$/litr. Za cenę \$3/litr może przerobić te chemikalia na 1kg produktu A, a za \$5/litr może przerobić je na 1 kg produktu B. Jeśli wyprodukuje $x_1$kg produktu A, to sprzeda je za cenę $\$30 - x_1$ za kilogram. A jeśli wyprodukuje x_2 kg produktu B, to sprzeda go za cenę $\$50 - 2x_2$ za kilogram. Jak monopolista może zmaksymalizować zysk?

Rozwiązanie
Niech x_3 oznacza ilość zakupionych chemikaliów (zakładamy, że nie wszystkie kupione chemikalia muszą być przetworzone na produkty!). Funkcja zysku będzie wyglądać następująco

$$\max_{x_1,x_2,x_3} f(x) = x_1(30 - x_1) + x_2(50 - x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3$$

przy oczywistym ograniczeniu na ilość zakupionych chemikaliów

$$x_3 \leqslant 17.25$$

oraz ilości przetworzonych chemikaliów, która być musi być mniejsza niż ilość kupionych chemikaliów

$$x_1 + x_2 \leqslant x_3$$

Po przekształceniu do postaci standardowej otrzymujemy następującą postać ZPN

$$\min_{x_1,x_2,x_3} f(x) = -x_1(30 - x_1) - x_2(50 - x_2) + 3x_1 + 5x_2 + 10x_3$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} g_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 0 \\ g_2(x) = x_3 - 17.25 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Utwórzmy funkcję Lagrange'a dla zadania

$$L(x,\lambda) = -x_1(30 - x_1) - x_2(50 - x_2) + 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - x_3) + \lambda_2(x_3 - 17.25)$$

Równania wynikające z warunków Kuhna-Tuckera są następujące

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -30 + 2x_1 + 3 + \lambda_1 = 0 \tag{8.22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -50 + 4x_2 + 5 + \lambda_1 = 0 \tag{8.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 10 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{8.24}$$

$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + x_3) = 0 \tag{8.25}$$

$$\lambda_2(x_3 - 17.25) = 0 \tag{8.26}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \tag{8.27}$$

W zadaniach tego typu należy rozważyć wszystkie przypadki, dla których dane ograniczenie jest spełnione równościowo (wtedy $\lambda_i > 0$) lub nierównościowo. Do rozpatrzenia jest 2^m przypadków (każda $\lambda_i = 0$ bądź $\lambda_i > 0$).

W omawianym przykładzie są cztery przypadki i dla każdego z nich rozwiążemy układ równań (8.22) - (8.27).

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
   Łatwo widać, że dochodzimy do sprzeczności, ponieważ równanie (8.24) nie jest spełnione dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$
   Ponownie widać, że równanie (8.24) po wstwieniu $\lambda_1 = 0$ przekształca się do $\lambda_2 = -10$, co znów jest sprzeczne np. z (8.27).

3. $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$
   Z równania (8.24) otrzymujemy, że $\lambda_1 = 10$. Stąd szybko rozwiązując pozostałe równania otrzymujemy punkt

$$x = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 8.75 \\ 17.25 \end{bmatrix}$$

   który jest jednocześnie punktem optymalnym i rozwiązaniem zadania, ponieważ spełnia warunki dostateczne optymalności (funkcja celu jest wypukła).

W powyższym zadaniu nie analizujemy już przypadku $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$, gdyż znaleźliśmy rozwiązanie optymalne, korzystając z warunków dostatecznych. Gdyby warunki dostateczne nie były spełnione, konieczne byłoby znalezienie wszystkich punktów spełniających warunki Kuhna-Tuckera (minima lokalne) i wybranie spośród nich tego, dla którego wartość funkcji celu jest najmniejsza (minimum globalne, punkt optymalny).

Odpowiedź
Monopolista powinien kupić 17.25 litra chemikaliów i przetworzyć je na 8.5kg produktu A oraz 8.75kg produktu B.

Przykład 8.2.2.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania nieliniowego

$$\min_{x_1,x_2} f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 25x_1 - 40x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 &\leqslant 2 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Sprowadzamy zadanie do postaci standardowej otrzymując

$$\min_{x_1,x_2} f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 25x_1 - 40x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= & x_1 + x_2 - 1 &\leqslant 0 \\ g_2(x) &= & 8x_1^2 + x_2^2 - 2 &\leqslant 0 \\ g_3(x) &= & -x_1 &\leqslant 0 \\ g_4(x) &= & -x_2 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Możemy sprawdzić, czy zadana funkcja jest wypukła. W tym celu przedstawiamy ją w postaci formy kwadratowej

$$f(x) = x^T \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 25 & -40 \end{bmatrix} x$$

oraz zweryfikujmy, czy macierz

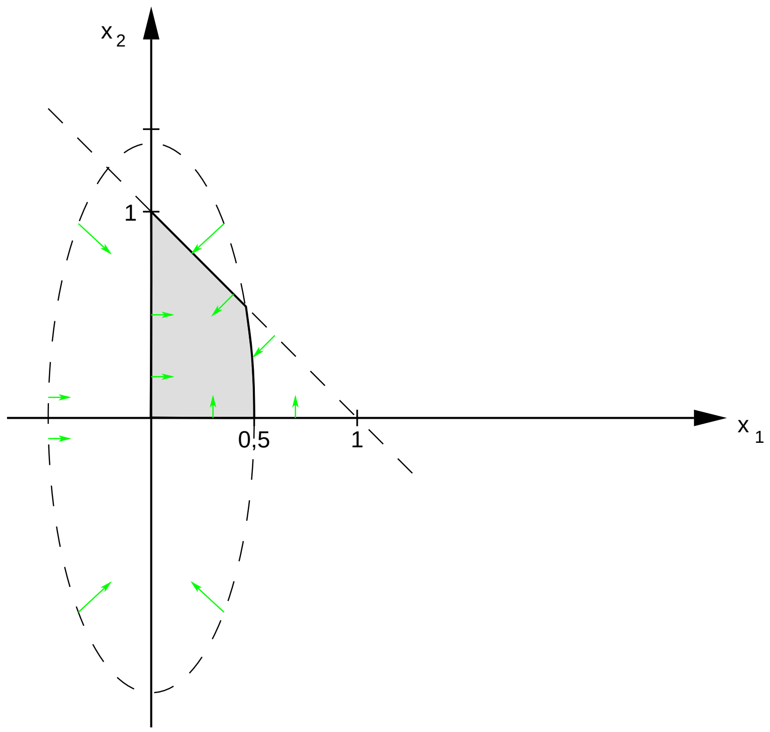
$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona, co umożliwi zastosowanie twierdzenia 8.3. Aby sprawdzić dodatnią określoność obliczymy wszystkie minory główne tej macierzy (twierdzenie 8.4)

1. Pierwszy minor główny $q_{11} = 4 \geqslant 0$,
2. Drugi minor główny
$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-3)(-3) = 20 - 9 = 11 \geqslant 0$$

A więc funkcja celu jest funkcją wypukłą.

Obszar rozwiązań dopuszczalnych przedstawiony został na rysunku 8.1 Jak widać jest on wypukły, a więc



Rysunek 8.1: Obszar rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 8.2.2

warunki Kuhna-Tuckera są jednocześnie warunkami wystarczającymi optymalności.

Ponieważ dokładne narysowanie poziomic funkcji celu jest dość długie rachunkowo (ale nie niemożliwe!), należy rozwiązać to zadanie wyłącznie analitycznie. Z rysunku 8.1 widać, że tylko niektóre punkty muszą być przeanalizowane w trakcie rozwiązywania układu równań powstałego z warunków Kuhna Tuckera, a więc tylko nieliczne przypadki muszą być rozpatrzone.

Zapiszmy funkcję Lagrange'a dla tego zadania

$$L(x,\lambda) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 25x_1 - 40x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2\left(8x_1^2 + x_2^2 - 2\right) - \lambda_3x_1 - \lambda_4x_2$$

Zapiszmy warunki Kuhna-Tuckera dla zadania

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = 8x_1 - 6x_2 + 25 + \lambda_1 + 16\lambda_2x_1 - \lambda_3 &= 0 && (8.28)\\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - 6x_1 - 40 + \lambda_1 + 2\lambda_2x_2 - \lambda_4 &= 0 && (8.29)\\
\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) &= 0 && (8.30)\\
\lambda_2\left(8x_1^2 + x_2^2 - 2\right) &= 0 && (8.31)\\
\lambda_3(-x_1) &= 0 && (8.32)\\
\lambda_4(-x_2) &= 0 && (8.33)\\
g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 &\leqslant 0 && (8.34)\\
g_2(x) = 8x_1^2 + x_2^2 - 2 &\leqslant 0 && (8.35)\\
g_3(x) = -x_1 &\leqslant 0 && (8.36)\\
g_4(x) = -x_2 &\leqslant 0 && (8.37)\\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\geqslant 0 && (8.38)
\end{aligned}$$

Rozważmy teraz kolejne przypadki możliwych wartości mnożników λ_i i rozwiązując układ równań (8.28)-(8.33) (jest to tylko pewien podzbiór równań wynikających z warunków K-T!). Uwaga! Kolejność jest nieprzypadkowa (uzasadnienie w tekście)

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
   Ponieważ warunki (8.30)-(8.33) są spełnione, pozostaje rozwiązać układ równań złożony z (8.28) oraz (8.29) czyli
   $$\begin{aligned} 8x_1 - 6x_2 &= -25\\ -6x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$$
   co daje punkt
   $$x = \begin{bmatrix} -\frac{4}{22} \\ \frac{85}{22} \end{bmatrix}$$
   który jednakże nie spełnia warunków Kuhna-Tuckera, gdyż jest sprzeczny np. z (8.36). Daje nam to jednak informację, gdzie znajduje się minimum funkcji bez ograniczeń. Dlatego kolejne rozpatrywane przypadki powinny weryfikować istnienie punktu optymalnego na którymś z ograniczeń będącym jak najbliżej znalezionego minimum bez ograniczeń (jest to rozumowanie heurystyczne, jednakże dla prostych przypadków sprawdzające się bardzo dobrze).

2. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$.
   Ponownie widać, że równania (8.31) oraz (8.33) są spełnione automatycznie. Pozostaje rozwiązać następujący układ równań
   $$\begin{aligned} 8x_1 - 6x_2 + \lambda_1 - \lambda_3 &= -25\\ -6x_1 + 10x_2 + \lambda_1 &= 40\\ x_1 + x_2 - 1 &= 0\\ -x_1 &= 0 \end{aligned}$$
   Łatwo otrzymujemy, że $x_1 = 0$. Stąd $x_2 = 1$. Pozostaje rozwiązać
   $$\begin{aligned} -6 + \lambda_1 - \lambda_3 &= -25\\ 10 + \lambda_1 &= 40 \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy następujące rozwiązanie dla tego przypadku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 30 \\ 49 \end{bmatrix}$$

które spełnia warunki Kuhna-Tuckera ($\lambda_i \geqslant 0$ oraz ograniczenia w tym punkcie są spełnione).

Z tego, że funkcja jest wypukła wnioskujemy, że znaleziony punkt jest rozwiązaniem ZPN

Odpowiedź
Rozwiązaniem zadania jest punkt

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dla którego funkcja celu przyjmuje wartość

$$f(\hat{x}) = -35$$

Przykład 8.2.3.
Rozwiązać następujące zagadnienie programowania nieliniowego

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right)$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leqslant & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 & & \leqslant & 4 \end{array}$$

Rozwiązanie
Zadanie to jest zadaniem minimalizacji w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a więc nie można wykonać rysunku pomocniczego. Należy to zadanie rozwiązać wykorzystując wyłącznie metodę analityczną. Warto również zauważyć, że funkcja nie jest funkcją wypukłą, toteż konieczne jest znalezienie wszystkich punktów spełniających warunki Kuhna-Tuckera i wybranie spośród nich tego, dla którego wartość funkcji celu jest najmniejsza.

Zapiszmy funkcję Lagrange'a dla tego zadania

$$L(x, \lambda) = -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right) + \lambda_1 \left(x_1 - 2x_2 + x_3 - 2\right) + \lambda_2 \left(4x_1 + 2x_2 - 4\right)$$

Zapiszmy warunki Kuhna-Tuckera dla zadania

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + x_1 + \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \tag{8.39}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - x_2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \tag{8.40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 + x_3 + \lambda_1 = 0 \tag{8.41}$$

$$\lambda_1(x_1 - 2x_2 + x_3 - 2) = 0 \tag{8.42}$$

$$\lambda_2 \left(4x_1 + 2x_2 - 4\right) = 0 \tag{8.43}$$

$$g_1(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 \leqslant 0 \tag{8.44}$$

$$g_2(x) = 4x_1 + 2x_2 - 4 \leqslant 0 \tag{8.45}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \tag{8.46}$$

Rozpatrujemy kolejne przypadki w celu znalezienia punktów spełniających równania (8.39)-(8.46).

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   Z powyższego założenia równania (8.42) oraz (8.43) są spełnione. Pozostaje rozwiązać układ równań złożony z (8.39)-(8.41), które przyjmą następującą postać

$$\begin{array}{rcl} -1 + x_1 & = & 0 \\ 1 - x_2 & = & 0 \\ -1 + x_3 & = & 0 \end{array}$$

co daje punkt $x^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, który nie spełnia warunków Kuhna-Tuckera, bo jest sprzeczny np z nierównością (8.44).

2. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.
Tym razem automatycznie spełnione jest równanie (8.42). Dostajemy układ złożony z równań (8.39)-(8.41) oraz równania (8.43), co daje nam

$$\begin{aligned} -1 + x_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 1 - x_2 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -1 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest punkt $\begin{bmatrix} x^T & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ spełniający warunki Kuhna-Tuckera.

Uwaga!
Pomimo tego, że znaleziony punkt spełnia warunki Kuhna-Tuckera, nie oznacza to, że jest on optymalny. Niewypukłość funkcji nie pozwala na zastosowanie warunku dostatecznego i tym samym nie możemy wnioskować o optymalności znalezionego punktu. Należy obliczyć wartość funkcji celu w tymże punkcie i porównać ją z wartościami innych punktów (o ile znajdziemy takowe) spełniających warunki Kuhna-Tuckera.

Funkcja celu dla znalezionego punktu przyjmuje wartość $f(x) = -\frac{1}{3}$.

3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$.
Z założenia spełnione jest równanie (8.43). Ponownie dostajemy układ równań wynikający tym razem z (8.39)-(8.41) oraz (8.42) postaci

$$\begin{aligned} -1 + x_1 + \lambda_1 &= 0 \\ 1 - x_2 - 2\lambda_1 &= 0 \\ -1 + x_3 + \lambda_1 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

którego rozwiązaniem jest punkt $\begin{bmatrix} x^T & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ również spełniający warunki Kuhna-Tuckera. Wartość funkcji celu w tym punkcie wynosi $f(x) = -\frac{3}{2}$.

4. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.
Tym razem żadne z równań nie jest automatycznie spełnione z założenia. Dostajemy układ pięciu równań złożonych z (8.39)-(8.43), który jest następujący

$$\begin{aligned} -1 + x_1 + \lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 1 - x_2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -1 + x_3 + \lambda_1 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest punkt $\begin{bmatrix} x^T & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{3}{22} \end{bmatrix}$, który nie spełnia warunków Kuhna-Tuckera (nie spełnia warunku (8.46)).

Odpowiedź
Rozwiązaniem zadania jest punkt

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dla którego funkcja celu przyjmuje wartość

$$f(\hat{x}) = -\frac{3}{2}$$

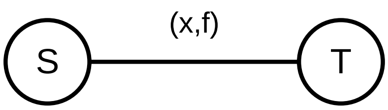
Ćwiczenia 9

Zadanie maksymalnego przepływu i minimalnego przekroju

Zadanie maksymalnego przepływu polega na znalezieniu jak największego przepływu w sieci reprezentowanej przez graf. Graf taki może symbolizować różne sieci występujące w praktyce. Każda gałąź ma ograniczony maksymalny przepływ. Najlepiej zadanie maksymalnego przepływu odnosi się do rozwiązania problemu maksymalnego przepływu w sieci rur o różnych przekrojach (czyli o różnym maksymalnym przepływie). Można również odnosić zadanie maksymalnego przepływu do zadań znalezienia maksymalnej przepustowości samochodów przez sieć komunikacyjną dróg etc.

9.1 Sieć

W obu zadaniach rozpatrywana jest pewna sieć (domyślnie przepływowa) dana w postaci grafu. W rozpatrywanych zadaniach łuki tego grafu są nieskierowane. Typowe oznaczenia stosowane do reprezentacji sieci zostało pokazane na rysunku 9.1. Każdy z wierzchołków ma swoją etykietę (najczęściej literę), natomiast każ-



Rysunek 9.1: Fragment grafu sieci przepływowej - połączenie dwóch wierzchołków i oznaczenie

da z krawędzi grafu opisana jest dwoma cyframi podawanymi jako para uporządkowana obok tejże krawędzi. Pierwsza liczba x jest aktualnym przepływem na danej krawędzi, natomiast druga wartość f jest maksymalnym przepływem w tej krawędzi. Gdy przepływ jest niezerowy, konieczne jest narysowanie kierunku tego przepływu.

Wyróżniamy trzy rodzaje wierzchołków

- Wierzchołki pośrednie - wierzchołki, dla których suma przepływów wchodzących równa jest przepływom wychodzącym z tego wierzchołka,
- Wierzchołki źródłowe - wierzchołki dla których łączące się z nimi gałęzie są jedynie gałęziami odpływowymi,
- Wierzchołki odpływowe - wierzchołki dla których łączące się z nimi gałęzie są jedynie gałęziami przypływowymi

Ograniczenia wynikające z własności wierzchołków źródłowych przekładają się na ograniczenia zadania (i są ograniczeniami liniowymi).

9.2 Sformułowanie problemu

9.2.1 Zagadnienie maksymalnego przepływu

Zagadnienie maksymalnego przepływu polega na znalezieniu największego możliwego przepływu z ustalonego węzła źródłowego do ustalonego węzła odpływowego. Innymi słowy, jeśli potraktować graf reprezentujący sieć jako pewną reprezentację np. sieci wodociągowej, a poszczególne ograniczenia na gałęziach reprezentują przepustowość rur (ilość litrów na minutę) w tej sieci, to rozwiązanie zadania maksymalnego przepływu odpowiada na pytanie ile wody maksymalnie można przepuścić w takiej sieci (na minutę).

9.2.2 Zagadnienie minimalnego przekroju

Definicja 9.1. *Przekrojem grafu G nazywamy podział tego grafu na podgrafy G_1 oraz G_2, przy czym gałęzie łączące poszczególne podgrafy powinny być skierowane tylko w jednym kierunku.*

Zagadnienie minimalnego przekroju polega na znalezieniu takiego podziału na dwa podgrafy, przy czym w jednym z tych podgrafów znajdują się wszystkie źródła, a w drugim wszystkie ujścia, aby przepustowość maksymalna gałęzi łączących oba te grafy była minimalna (w stosunku do wszystkich możliwych przekrojów danego grafu).

Innymi słowy, rozwiązanie zagadnienia minimalnego przekroju pozwala znaleźć „wąskie gardła” w sieci.

9.3 Dualność

Oba zadania - zarówno maksymalnego przepływu, jak i minimalnego przekroju są zadaniami programowania liniowego. Są one ze sobą ściśle powiązane.

Lemat 9.1. *Zadanie minimalnego przekroju jest zadaniem dualnym do zadania maksymalnego przepływu.*

Co więcej, oba zadania spełniają założenia o unimodularności macierzy ograniczeń, toteż dla współczynników całkowitoliczbowych rozwiązanie optymalne jest rozwiązaniem całkowitoliczbowym.

9.4 Sprowadzanie zadań do postaci standardowej

Ponieważ w postaci standardowej grafu występuje tylko jedno źródło i tylko jeden odpływ, należy w przypadkach gdy tak nie jest, sprowadzić zadanie do postaci standardowej.

9.4.1 Więcej niż jedno źródło

W przypadku występowania więcej niż jednego źródła należy dodać do grafu jeden węzeł, który będzie jedynym węzłem źródłowym, a źródła z grafu wyjściowego traktowane są jako zwykłe wierzchołki pośrednie. Gałęzie łączące dodatkowy węzeł ze źródłami mają przepustowość równą nieskończoności. Typowe przekształcenie zaprezentowane zostało na rysunku 9.2.

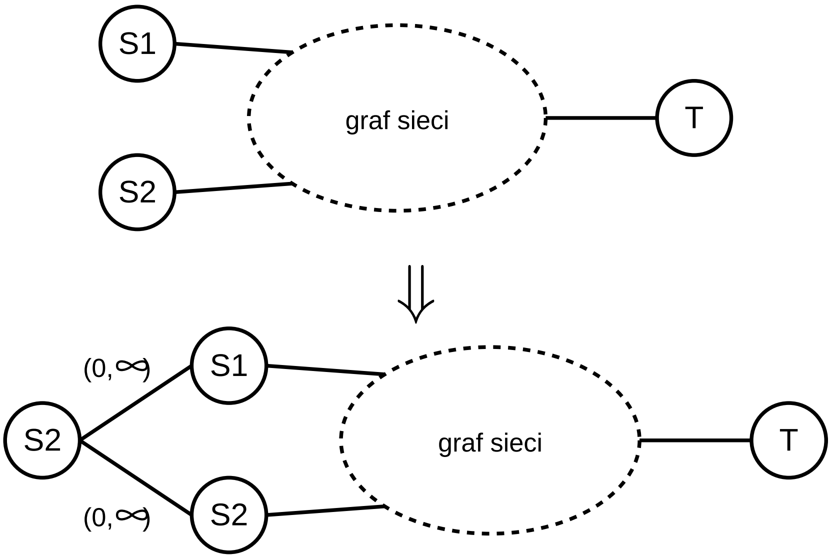
9.4.2 Więcej niż jeden odpływ

W przypadku więcej niż jednego odpływu w grafie postępujemy podobnie, jak w przypadku więcej niż jednego źródła, a więc dodawany jest dodatkowy węzeł (odpływ zbiorczy), a poprzednie odpływy traktowane są jako wierzchołki pośrednie. Gałęzie łączące nowy odpływ, podobnie jak poprzednio, mają przepustowość nieskończoną. Przykład takiego przekształcenia pokazuje rysunek 9.3.

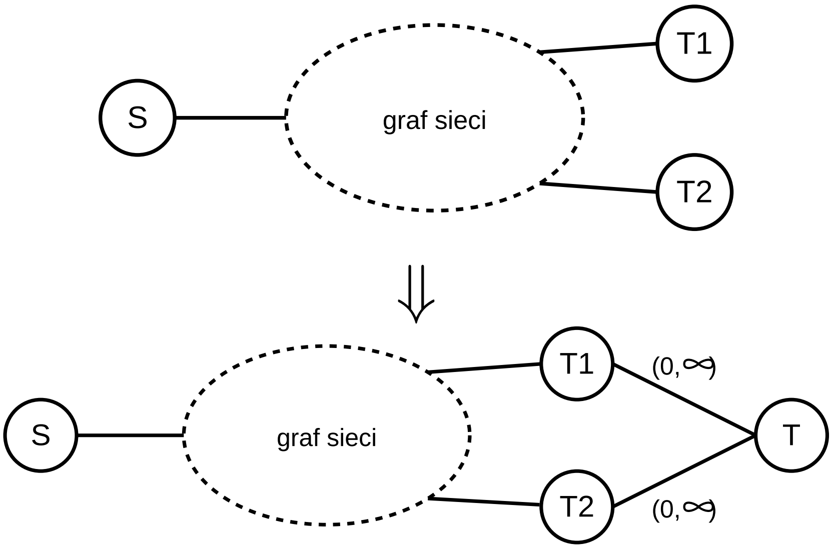
9.5 Algorytm cechowania

Zakładamy, że x_{ij} oznacza aktualny przepływ z węzła i do j, natomiast f_{ij} oznacza maksymalny przepływ z węzła i do węzła j.

KROK I Przypisujemy $x_{ij} = 0$,



Rysunek 9.2: Schemat postępowania w przypadku występowania więcej niż jednego źródła



Rysunek 9.3: Schemat postępowania w przypadku występowania więcej niż jednego źródła

KROK II Nadajemy cechę $[-,\infty]$ węzłowi startowemu s,

KROK III Wybieramy ostatnio ocechowany węzeł i

- Dowolnemu nieocechowanemu węzłowi j dla którego $x_{ij} < f_{ij}$ nadajemy cechę $[i+, v_j]$, gdzie

$$v_j = \min\{v_i, f_{ij} - x_{ij}\} \tag{9.1}$$

- Dowolnemu węzłowi j, który jest nieocechowany oraz $x_{ji} > 0$ przypisujemy cechę $[i-, v_j]$, gdzie

$$v_j = \min\{v_i, x_{ji}\} \tag{9.2}$$

KROK IV Węzeł j po otrzymaniu cechy poddawany jest procesowi kroku 3, dopóki wszystkie węzły ocechowane nie zostaną sprawdzone z węzłami nieocechowanymi łączącymi je.

Krok V Jeśli węzeł t został ocechowany to zmieniamy przepływy w sieci następująco

$$x'_{ij} = x_{ij} + v_m \qquad \text{dla } (i,j) \text{ gdy } j \text{ ma cechę } [i+, v_j] \tag{9.3}$$

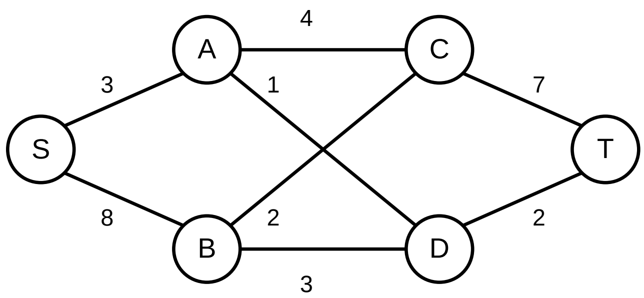
$$x'_{ji} = x_{ji} - v_m \qquad \text{dla } (j,i) \text{ gdy } j \text{ ma cechę } [i-, v_j] \tag{9.4}$$

$$x'_{ij} = x_{ij} \qquad \text{dla pozostałych} \tag{9.5}$$

oraz wracamy do kroku 2.
Jeśli wierzchołek t nie został ocechowany, to znaleziono rozwiązanie — suma przepływów wypływających z wierzchołka s jest równa przepływowi maksymalnemu, natomiast wierzchołki ocechowane i nieocechowane w ostatniej iteracji algorytmu dzielą graf tworząc przekrój minimalny.

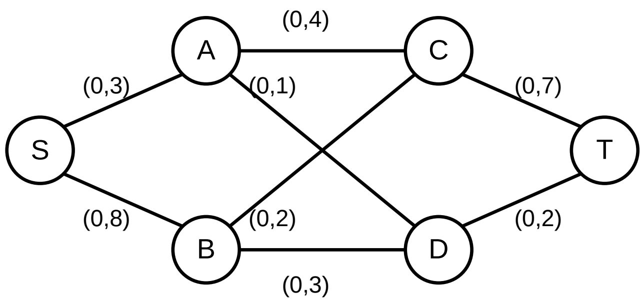
9.6 Przykłady

Przykład 9.6.1.
Znaleźć przepływ maksymalny z węzła S do węzła T oraz minimalny przekrój dla następującej sieci (przy łukach oznaczono ich maksymalną przepustowość w obie strony)

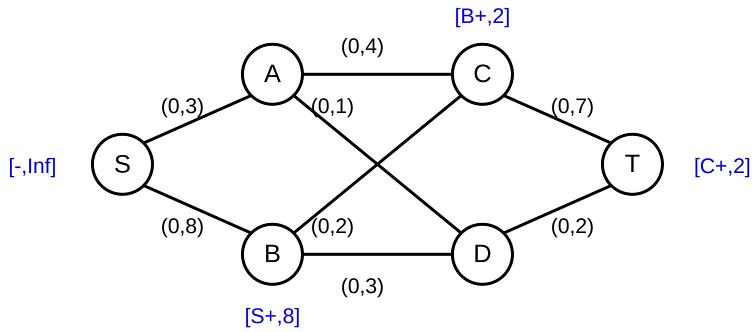


Rozwiązanie

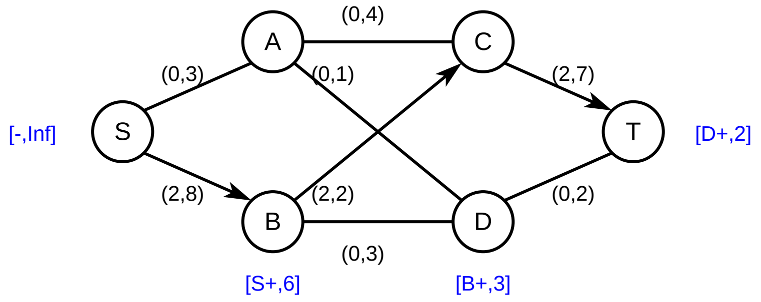
Krok I Na grafie zaznaczamy rozwiązanie początkowe (przepływy zerowe).



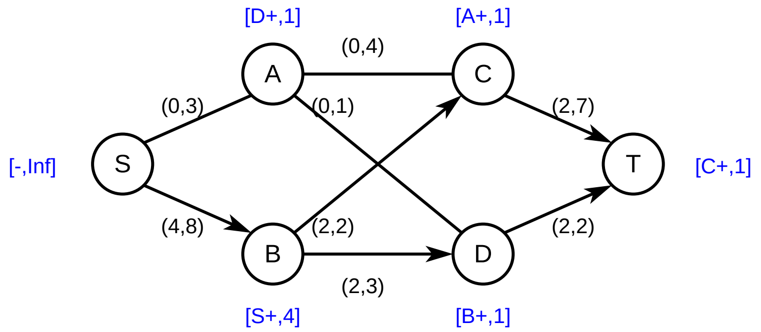
Następnie znajdujemy pierwszą możliwą ścieżkę od węzła S do węzła T cechując odpowiednie wierzchołki



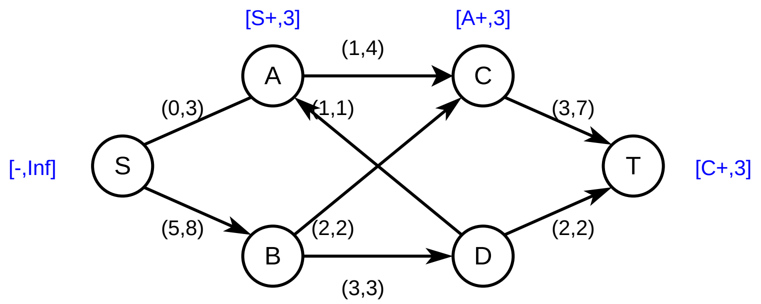
Krok II Zmieniamy przepływy o wartość przepływu, którą został ocechowany węzeł końcowy T, czyli 2. Graf po zmianie przepływów i znalezieniu kolejnego cechowania wygląda następująco (zaznaczono również kierunek przepływu dla gałęzi o niezerowym przepływie)



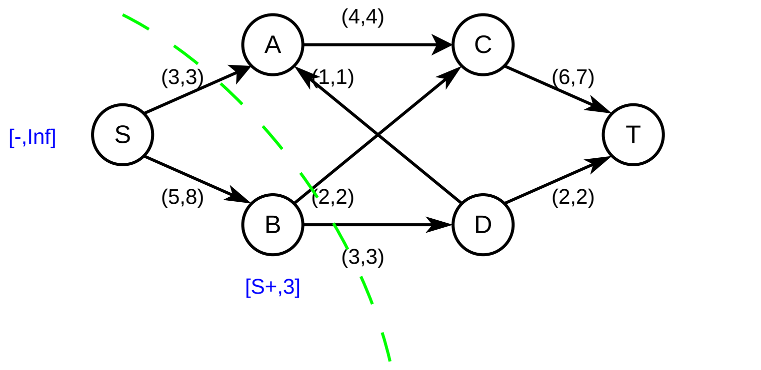
Krok III Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



Krok IV Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



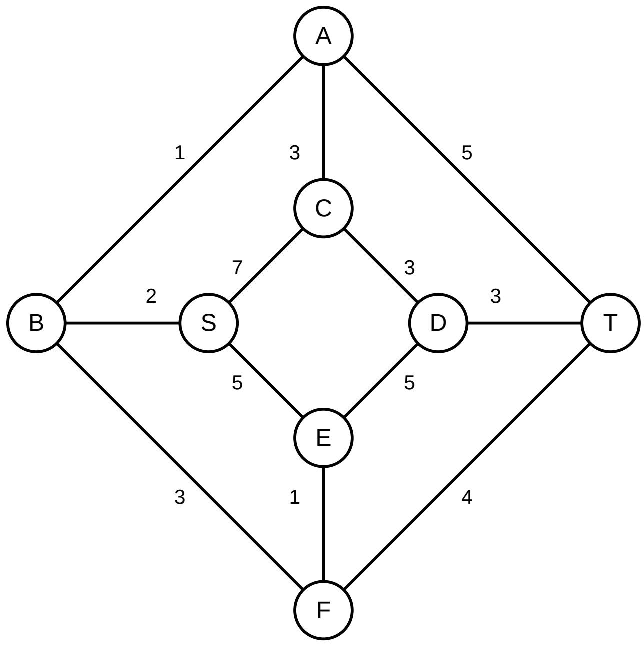
Krok V Modyfikujemy przepływy i próbujemy znaleźć cechowanie



Ponieważ nie można już znaleźć ścieżki od źródła S do ujścia T, to znaleziono rozwiązanie optymalne. Przekrój minimalny został zaznaczony na rysunku (oddziela węzły ocechowane i nieocechowane w ostatniej iteracji).

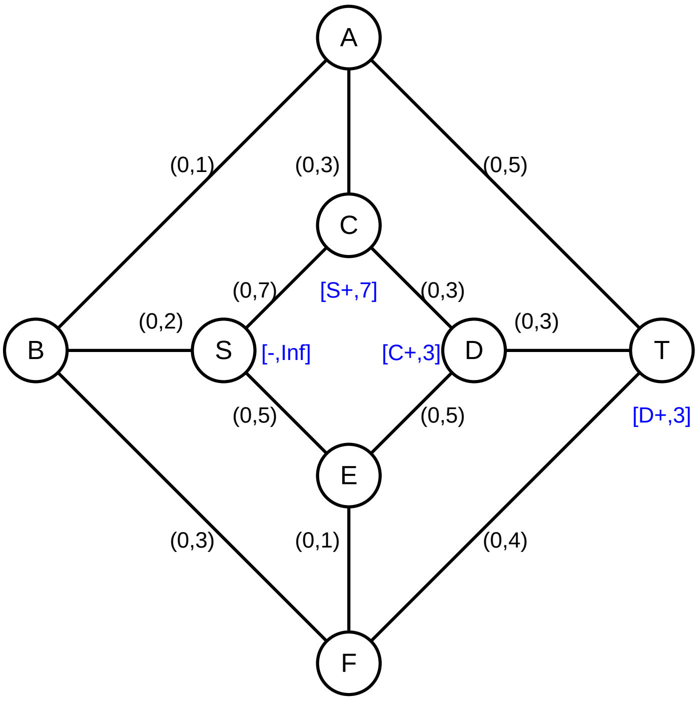
Odpowiedź
Przepływ maksymalny dla danego przykładu wynosi $f_{max} = 8$, natomiast przekrój minimalny to podział na dwa podgrafy, do których należą odpowiednio węzły $\{S, B\}$ oraz $\{A, C, D, E\}$.

Przykład 9.6.2.
Znaleźć przepływ maksymalny f_{max} z węzła S do węzła T oraz przekrój minimalny dla następującej sieci (przy łukach pokazano maksymalną przepustowość gałęzi w obie strony)

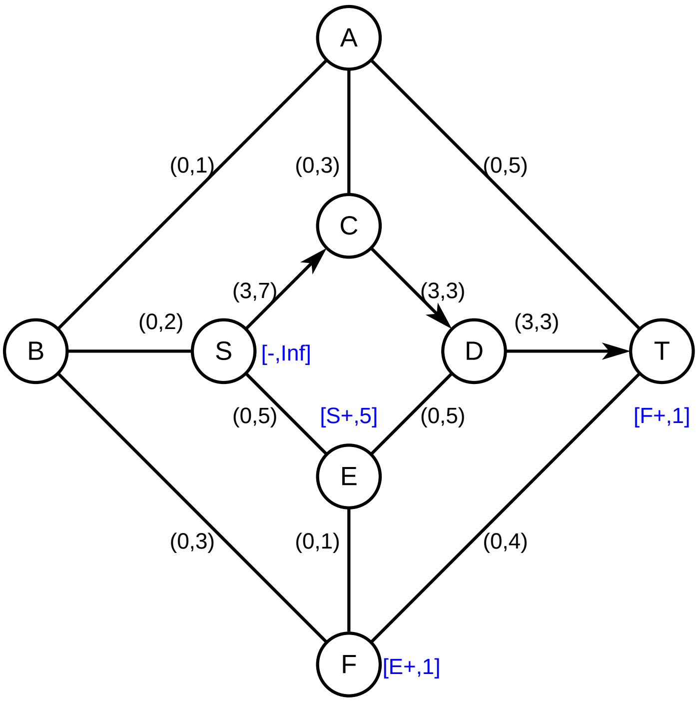


Rozwiązanie

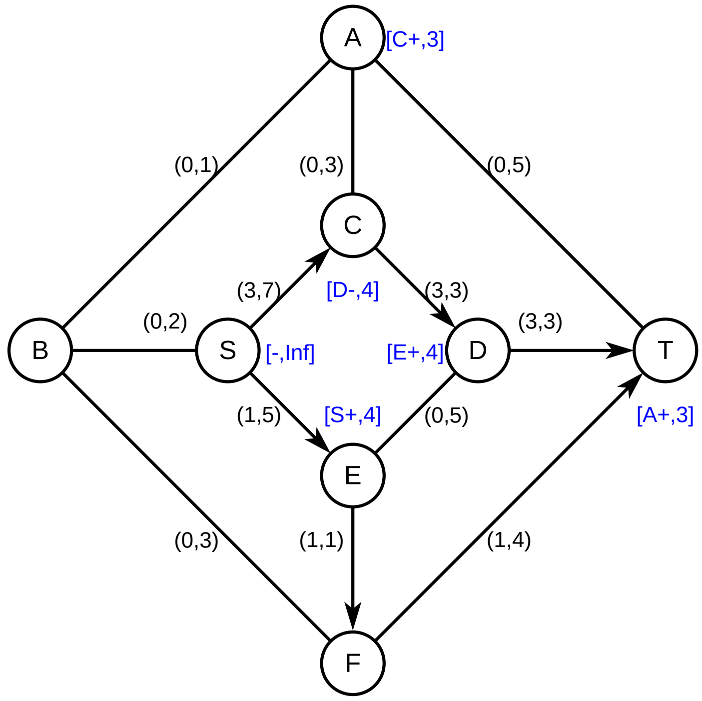
Krok I Zaznaczamy zerowe rozwiązanie początkowe oraz znajdujemy pierwszą ścieżkę



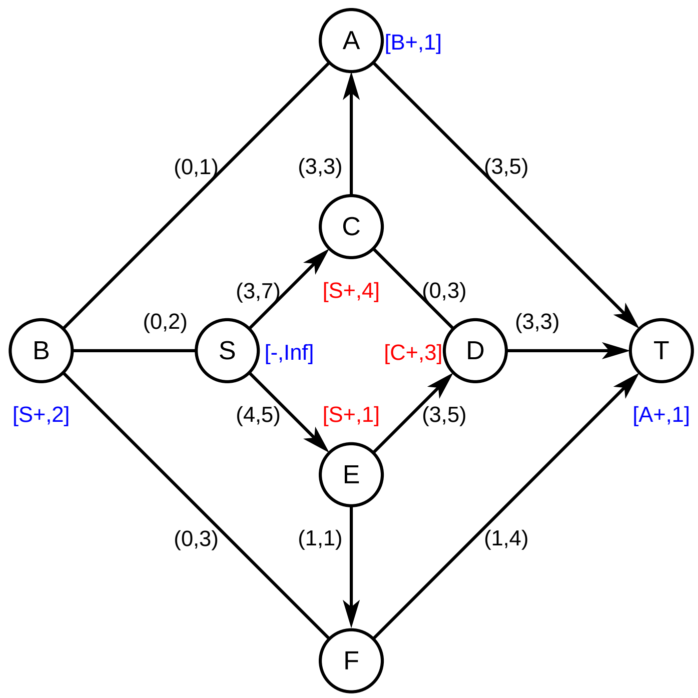
Krok II Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



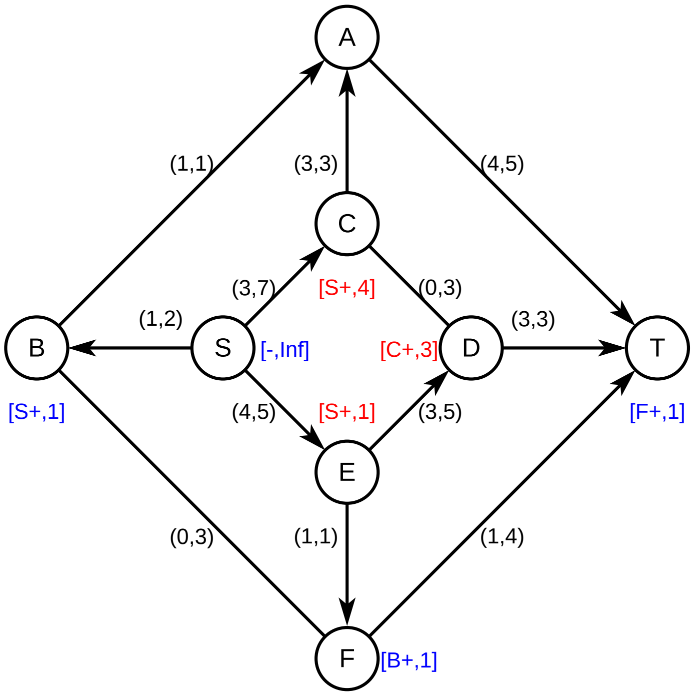
Krok III Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



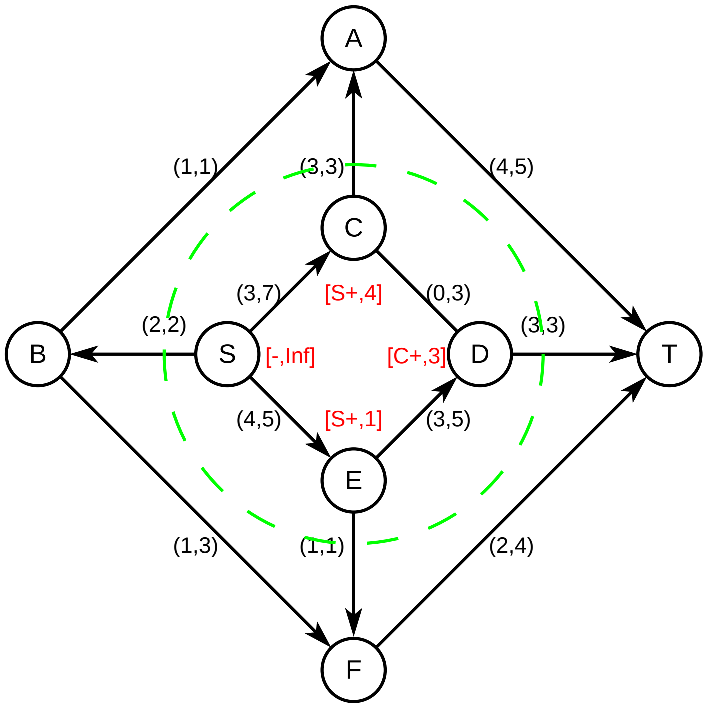
Krok IV Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



Krok V Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie



Krok VI Ponownie zmieniamy przepływy i znajdujemy kolejne cechowanie

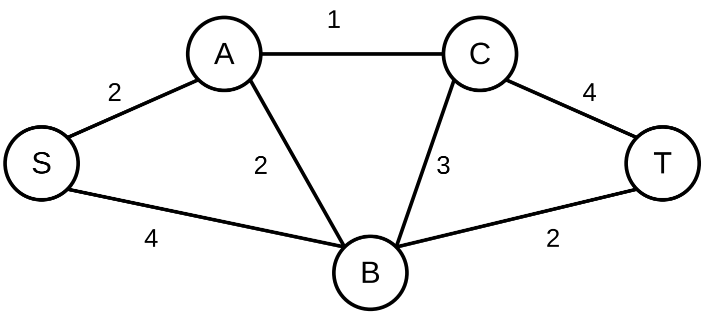


Ponieważ nie można już znaleźć drogi od węzła S do węzła T, to znaleziono rozwiązanie optymalne, a przekrój minimalny został zaznaczony na rysunku.

Odpowiedź
Przepływ maksymalny dla zadanej sieci wynosi $f_{max} = 9$ natomiast przekrój minimalny tworzą dwa podgrafy o wierzchołkach odpowiednio $\{S, C, D, E\}$ oraz $\{A, B, F, T\}$.

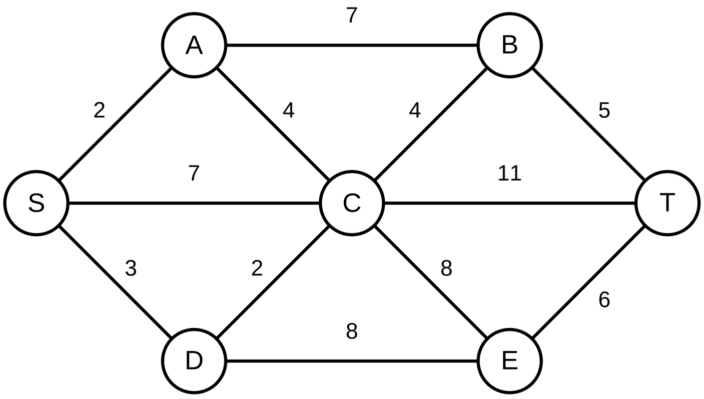
9.7 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 9.1.
Znaleźć przepływ maksymalny f_{max} z węzła S do węzła T oraz przekrój minimalny dla następującej sieci (przy łukach pokazano maksymalną przepustowość gałęzi w obie strony)

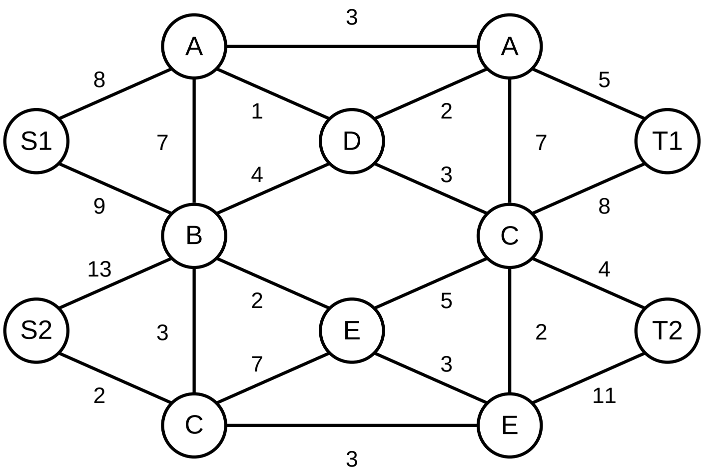


Zadanie 9.2.
Zapisać Zagadnienie Programowania Liniowego w postaci analitycznej dla sieci podanej w zadaniu 9.1.

Zadanie 9.3.
Znaleźć przepływ maksymalny f_{max} z węzła S do węzła T oraz przekrój minimalny dla następującej sieci (przy łukach pokazano maksymalną przepustowość gałęzi w obie strony)



Zadanie 9.4.
Znaleźć przepływ maksymalny f_{max} z węzłów $S1$ i $S2$ do węzłów $T1$ i $T2$ oraz znaleźć przekrój minimalny dla następującej sieci (przy łukach pokazano maksymalną przepustowość gałęzi w obie strony)

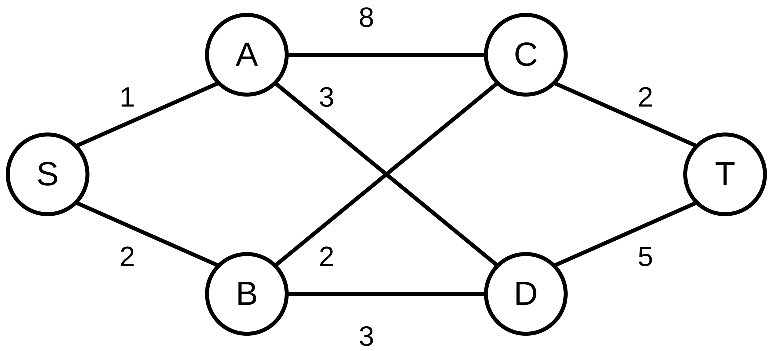


Ćwiczenia 10

Zadanie najkrótszej ścieżki - algorytm Dijkstry

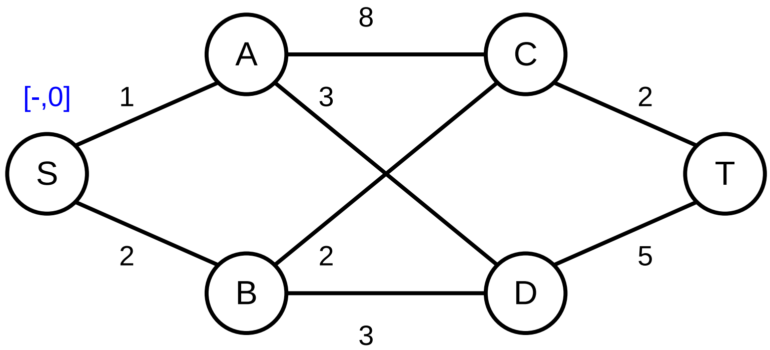
[1]

Przykład 10.0.1.
Znaleźć najkrótszą trasę z wierzchołka S do wierzchołka T dla zadanego grafu



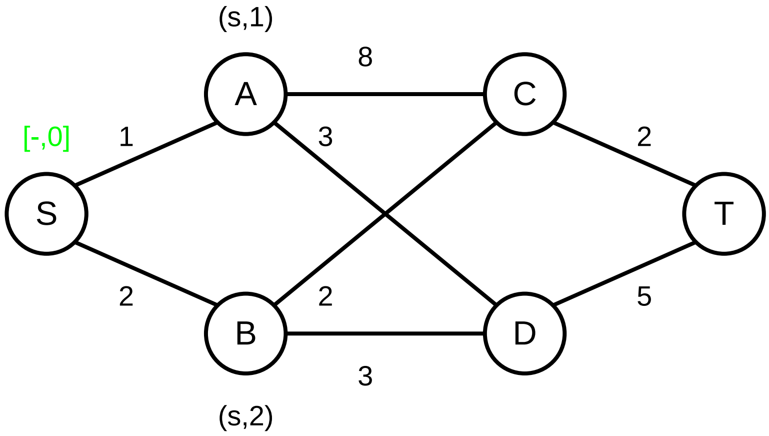
Rozwiązanie

Krok I Oznaczamy „permanentnie” wierzchołek początkowy i wybieramy go jako wierzchołek wyróżniony w danym kroku

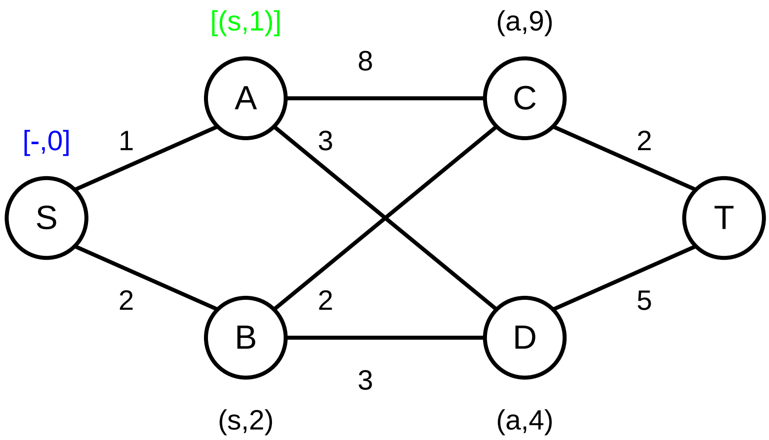


następnie oznaczamy „tymczasowo” wierzchołki połączone z wierzchołkiem wyróżnionym, każdemu przypisując odpowiednie oznaczenie (parę oznaczającą wierzchołek wyróżniony oraz koszt ścieżki od wierzchołka początkowego do wierzchołka oznaczanego).

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

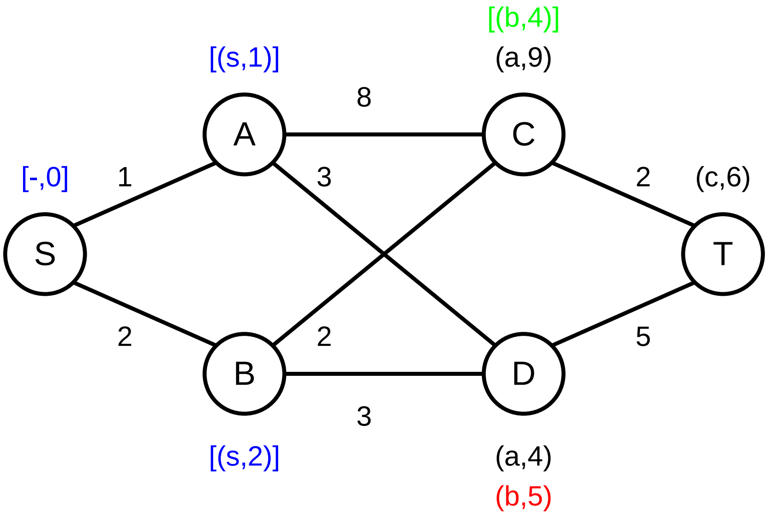


Krok II Spośród wierzchołków oznaczonych „tymczasowo” wybieramy ten, który ma najmniejszy koszt. Tenże wierzchołek staje się wierzchołkiem oznaczonym „permanentnie” (co oznaczamy na grafie nawiasami kwadratowymi) i jednocześnie wierzchołkiem wyróżnionym dla aktualnego kroku. Ponownie oznaczamy wszystkie wierzchołki nieoznaczone, bądź oznaczone „tymczasowo” połączone z wierzchołkiem wyróżnionym. Dostajemy następujący graf



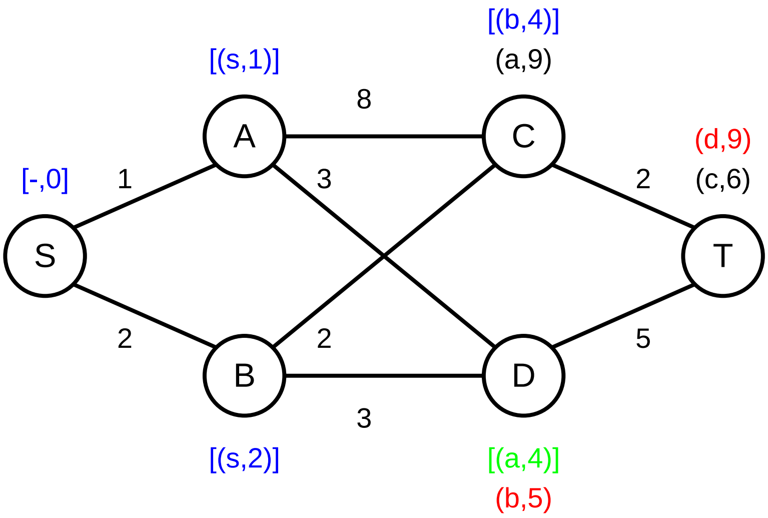
Uwaga!
Koszt oznaczanego wierzchołka obliczamy jako koszt wierzchołka wyróżnionego plus koszt ścieżki łączącej oba wierzchołki

Krok III Ponownie spośród wierzchołków oznaczonych „tymczasowo” wybieramy ten, który posiada oznaczenie o najmniejszym koszcie i oznaczamy wierzchołki do niego przyległe. Otrzymujemy następujący graf

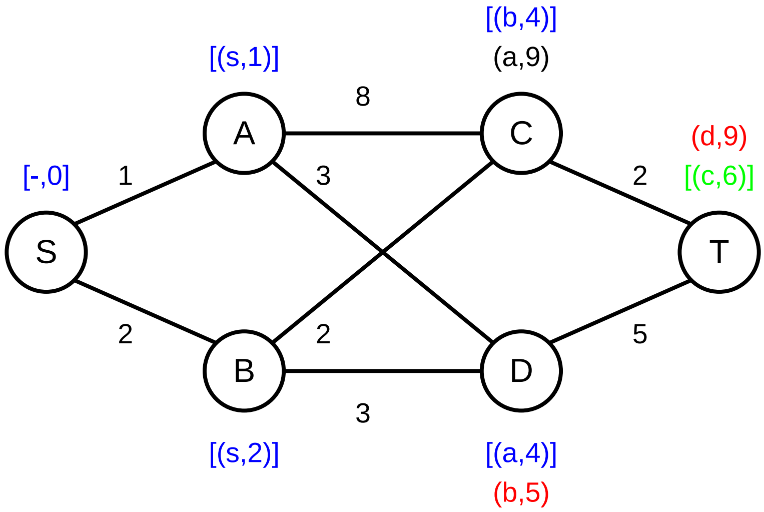


Zauważmy, że jeśli dany wierzchołek posiada więcej niż jedno oznaczenie „tymczasowe” to rozważane w algorytmie jest tak naprawdę tylko to oznaczenie, które posiada najmniejszy koszt (zbędne oznaczenia wyróżniono kolorem czerwonym).

Krok IV Kolejny graf jest następujący



Krok V Kolejny graf jest następujący



Ponieważ jako wierzchołek wyróżniony wybrany został wierzchołek końcowy, oznacza to Stop, znaleziono ścieżkę optymalną. Koszt tej ścieżki jest równy kosztowi przypisanemu wierzchołkowi końcowemu, natomiast ścieżkę wyznaczamy posługując się nazwami wierzchołków w kolejnych oznaczeniach „permanentnych".

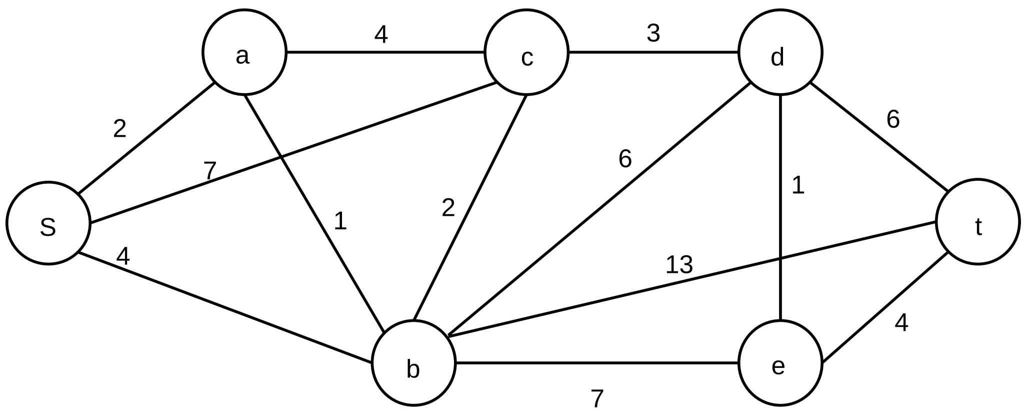
Odpowiedź
Najkrótsza ścieżka od węzła S do węzła T, to

$$S \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow T$$

a jej koszt wynosi 6.

10.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 10.1.
Znaleźć najkrótszą trasę z wierzchołka S do wierzchołka T dla zadanego grafu

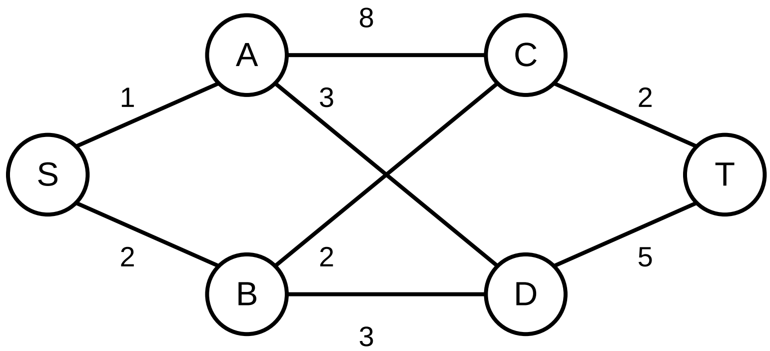


Ćwiczenia 11

Algorytm programowania dynamicznego

[1]

Przykład 11.0.1.
Znaleźć najkrótszą trasę z wierzchołka S do wierzchołka T dla zadanego grafu używając algorytmu programowania dynamicznego



Przykład 11.0.2.
Pewien przedsiębiorca chce wybudować dokładnie 7 domów w 3 lata. W każdym roku może wybudować $d = \{1, 2, 3\}$ domów. W roku pierwszym postawienie jednego domu kosztuje $k_1 = 100$ tysięcy złotych, w roku drugim $k_2 = 200$ tysięcy złotych, a w roku trzecim $k_3 = 300$ tysięcy złotych. Ile domów w każdym z lat powinien budować przedsiębiorca, aby wybudowanie wszystkich 7 kosztowało go najmniejszą możliwą sumę pieniędzy?

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

Ćwiczenia 12

Zadanie najtańszego przepływu

[1]

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

Ćwiczenia 13

Kolokwium 2

[1]

[1] Ćwiczenia do uzupełnienia

Bibliografia

[1] A. Wierzbicki W. Findeisen, J. Szymanowski. *Teoria i Metody Obliczeniowe Optymalizacji.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.