

# Metody Rozmyte i Algorytmy Ewolucyjne

mgr inż. Piotr Kaczyński

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy  
Szkoła Nauk Ścisłych  
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Metody symulacji algorytmu  
Zarządzanie populacją



# Plan wykładu

- 1 **Metody oceny i symulacji**
  - Ogólny schemat algorytmu
  - Eksploracja i eksploatacja
  - Ocena algorytmu ewolucyjnego
- 2 **Metody selekcji**
  - Metody reprodukcji
  - Metody sukcesji
- 3 **Kryteria zatrzymania algorytmu**
  - Kryteria związane z rozwiązaniami
  - Kryteria związane z różnorodnością

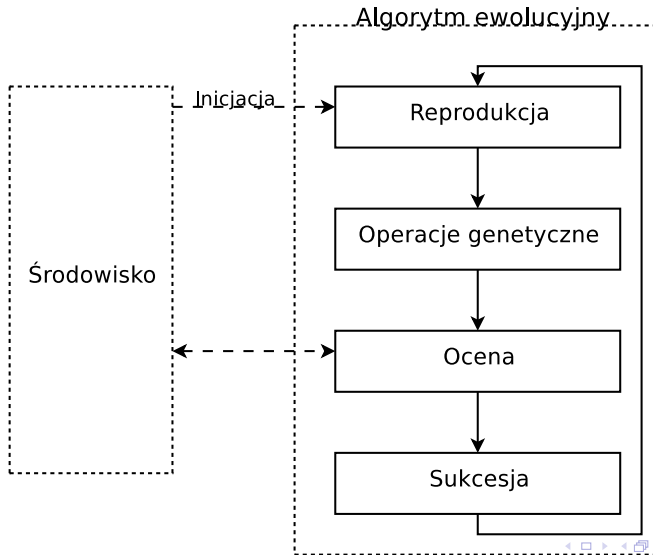


# Ogólny schemat algorytmu ewolucyjnego

- $t = 0$
- Inicjacja  $P^t$
- Ocena  $P^t$
- while not warunek stopu do
  - $T^t =$  reprodukcja  $P^t$
  - $O^t =$  operacje genetyczne  $T^t$
  - ocena  $O^t$
  - $P^{t+1} =$  sukcesja( $P^t, O^t$ )
  - $t = t + 1$



# Schemat algorytmu ewolucyjnego - przypomnienie



# Eksploracja i eksploatacja

- **Eksploracja**
  - Przeszukiwanie zgrubne całego obszaru,
  - Próba odnalezienia okolic optimów lokalnych,
  - Zdolność eksploracji algorytmu to zdolność do jak najszerszego przeszukiwania obszaru rozwiązań
- **Eksploatacja**
  - Przeszukiwania dokładne okolic optimów,
  - Próba jak najdokładniejszego znalezienia samego optimum,
  - Zdolność eksploatacji algorytmu to zdolność do jak najdokładniejszego znajdowania optimów,
- Na co powinien kłaść nacisk algorytm?

# Eksploracja i eksploatacja

- **Eksploracja**
  - Przeszukiwanie zgrubne całego obszaru,
  - Próba odnalezienia okolic optimów lokalnych,
  - Zdolność eksploracji algorytmu to zdolność do jak najszerszego przeszukiwania obszaru rozwiązań
- **Eksploatacja**
  - Przeszukiwania dokładne okolic optimów,
  - Próba jak najdokładniejszego znalezienia samego optimum,
  - Zdolność eksploatacji algorytmu to zdolność do jak najdokładniejszego znajdowania optimów,
- Na co powinien kłaść nacisk algorytm?
- **Na eksplorację i eksploatację!**



# Eksploracja i eksploatacja - przykład

## Przykład - szukanie złóż ropy naftowej

Mając do przeszukania zadany obszar najpierw w dość przypadkowy sposób wykonywane są płytkie, testowe odwierty. Jest to eksploracja terenu.

Jeśli znalezione zostanie złoża w którymś z odwiertów, to wykonywane są kolejne, powiększające możliwości wydobywania ropy. Jest to eksploatacja złoża.

Ponieważ nigdy nie wiadomo, czy trafiliśmy na największe złoża, konieczny jest nacisk na eksplorację. Ale chcemy jednocześnie jak najbardziej eksploatować znalezione złoża. Dlatego konieczne jest równoważenie obu.



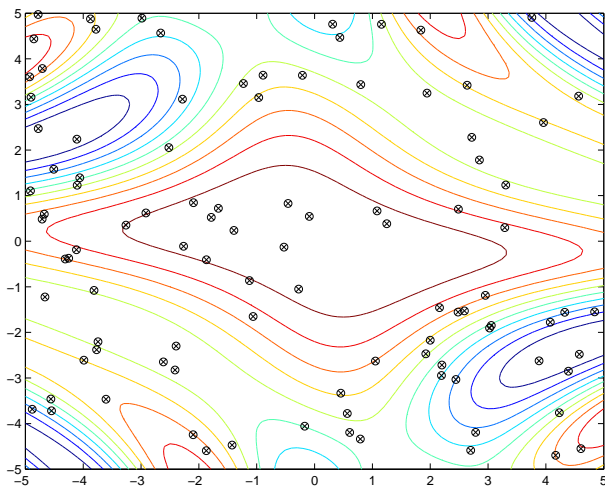
# Nacisk selektywny

- **Nacisk selektywny** to pewna miara zrównoważenia eksploracji i eksploatacji,
- **Duży** nacisk selektywny oznacza dużą zdolność eksploatacji,
  - Występuje „silna selekcja”,
  - Osobniki o większym przystosowaniu są promowane bardzo silnie,
  - Nowe osobniki powstają w pobliżu silnych, przeszukiwane są optima lokalne,
- **Mały** nacisk selektywny oznacza dużą zdolność eksploracji
  - Występuje „łagodna selekcja”,
  - Osobniki o większym przystosowaniu nie są tak silnie promowane,
  - Nowe osobniki powstają również w pobliżu słabych osobników, populacja jest „rozproszona” po całym obszarze dopuszczalnym,

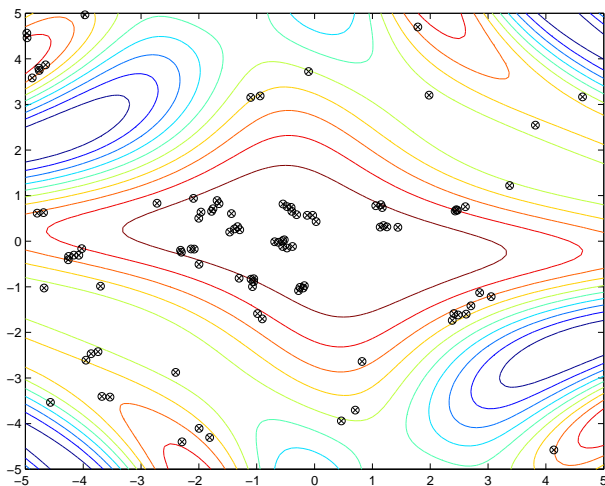




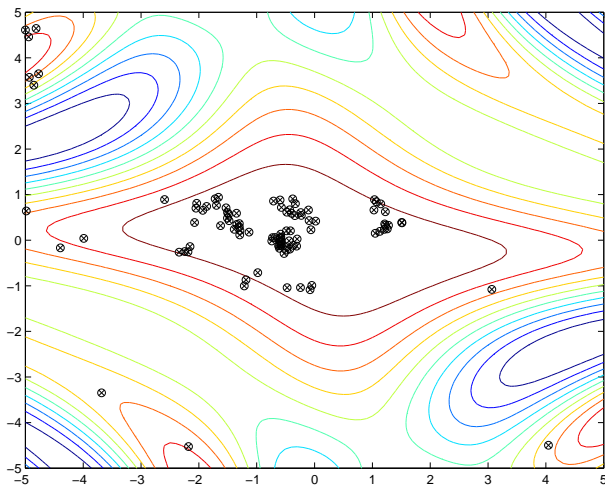
# Duży nacisk selektywny - przykład



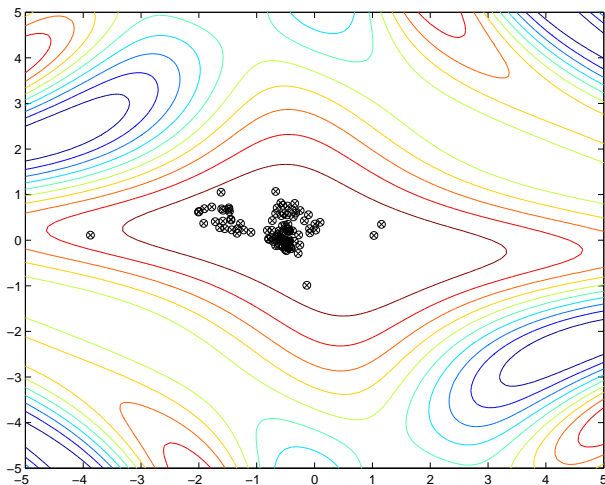
# Duży nacisk selektywny - przykład



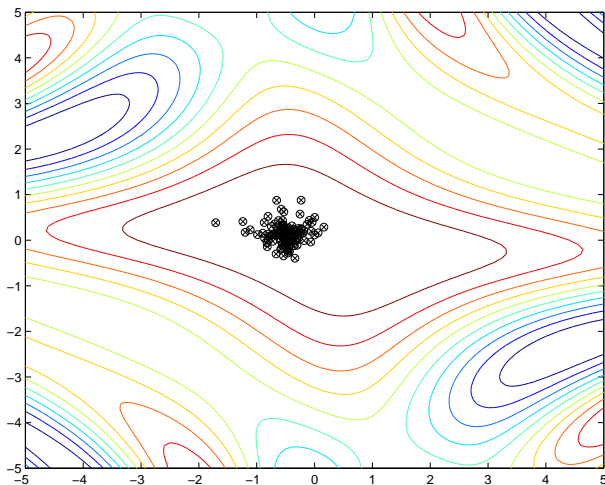
# Duży nacisk selektywny - przykład



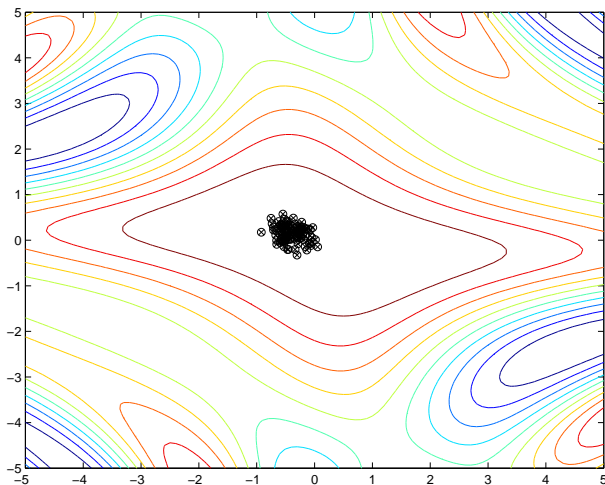
# Duży nacisk selektywny - przykład



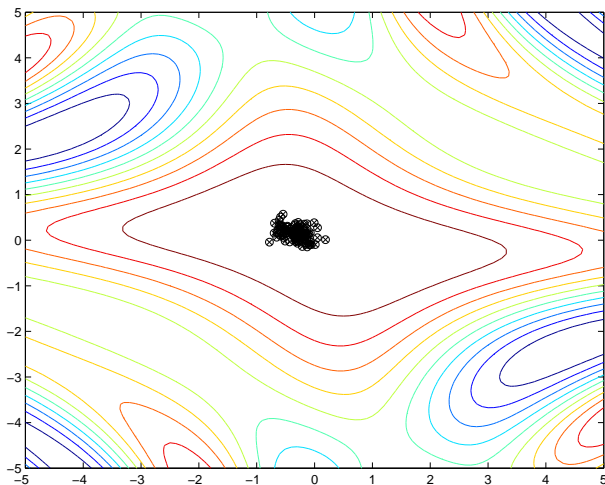
# Duży nacisk selektywny - przykład



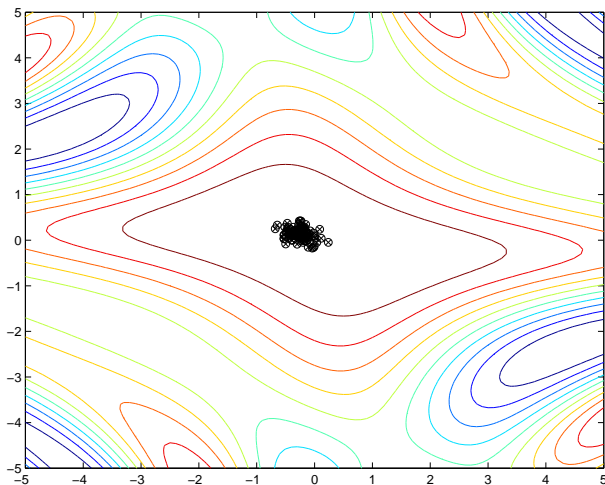
# Duży nacisk selektywny - przykład



# Duży nacisk selektywny - przykład

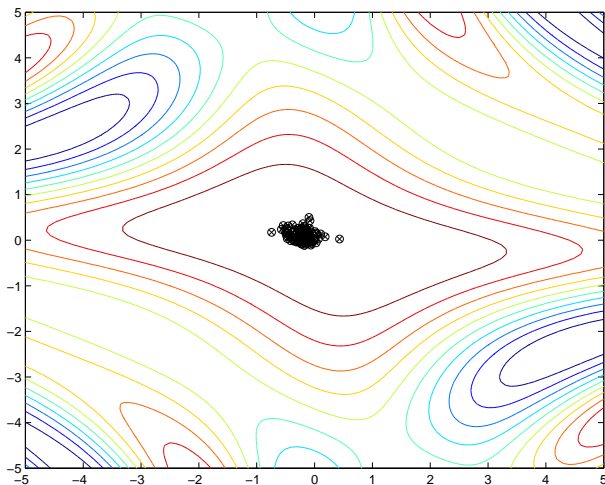


# Duży nacisk selektywny - przykład

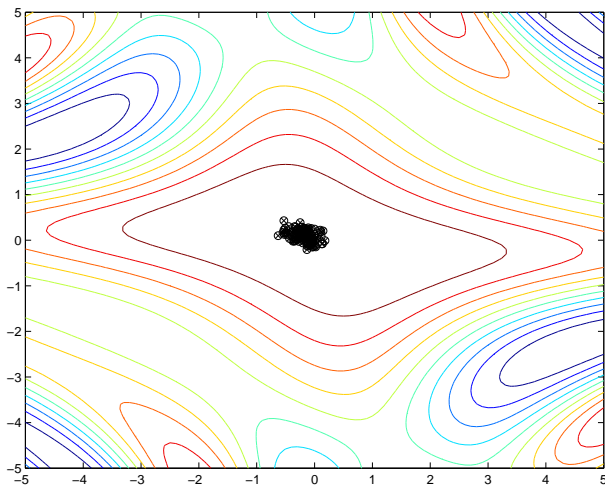




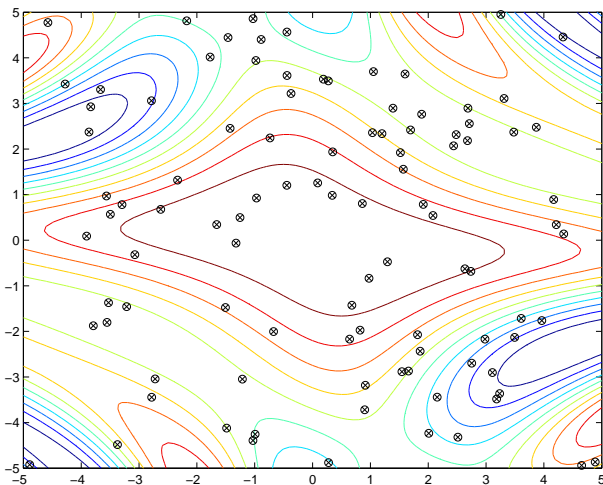
# Duży nacisk selektywny - przykład



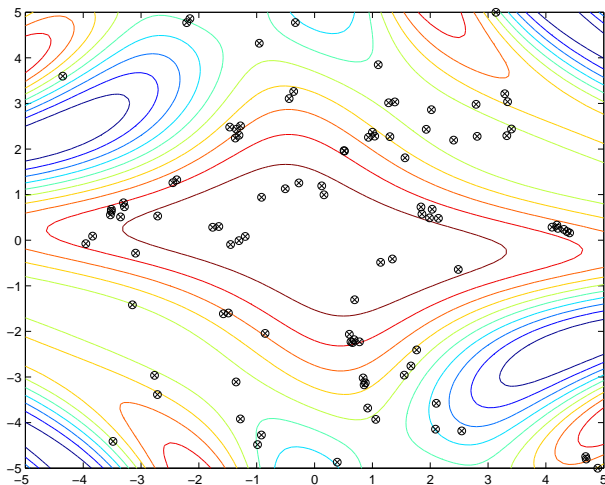
# Duży nacisk selektywny - przykład



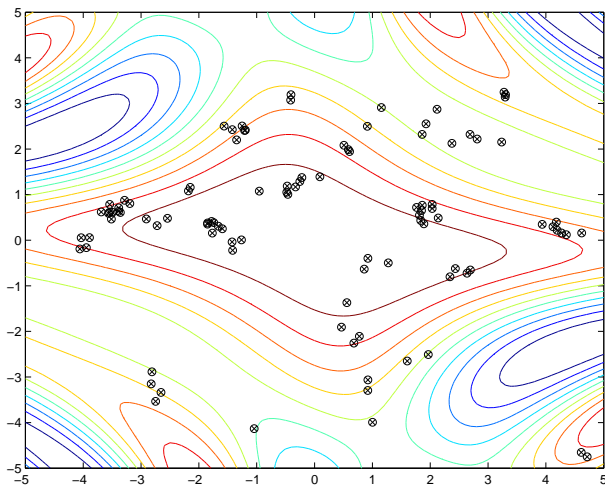
# Mały nacisk selektywny - przykład



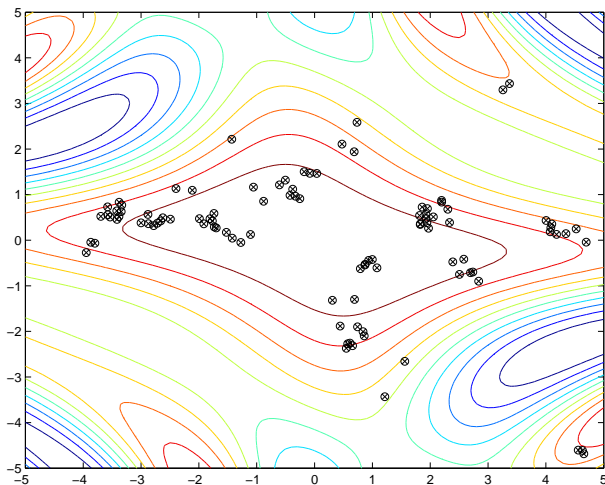
# Mały nacisk selektywny - przykład



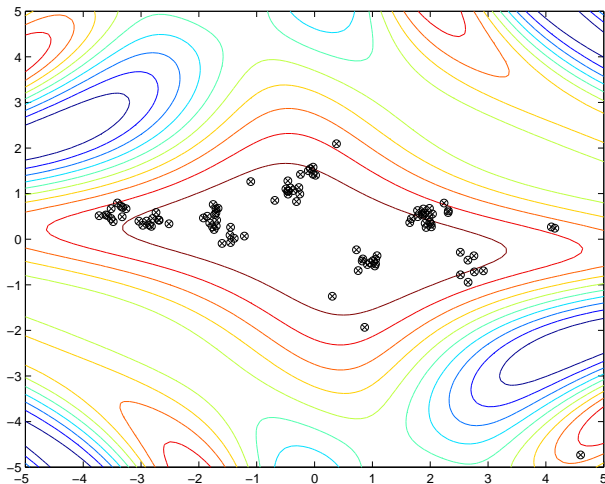
# Mały nacisk selektywny - przykład



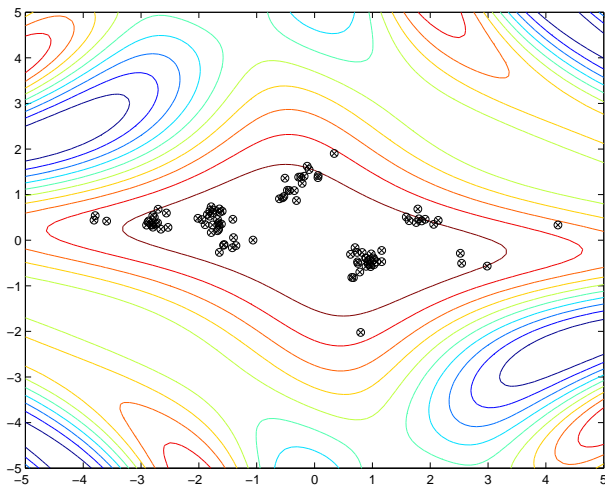
# Mały nacisk selektywny - przykład



# Mały nacisk selektywny - przykład

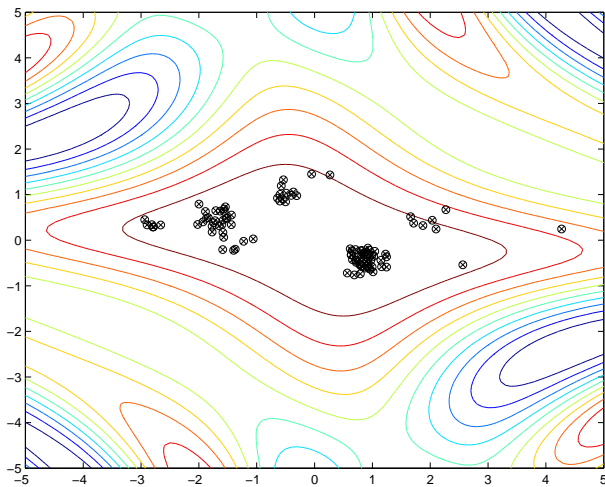


# Mały nacisk selektywny - przykład

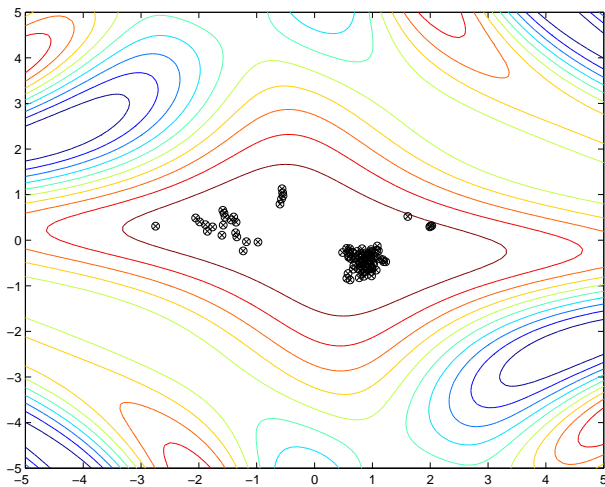




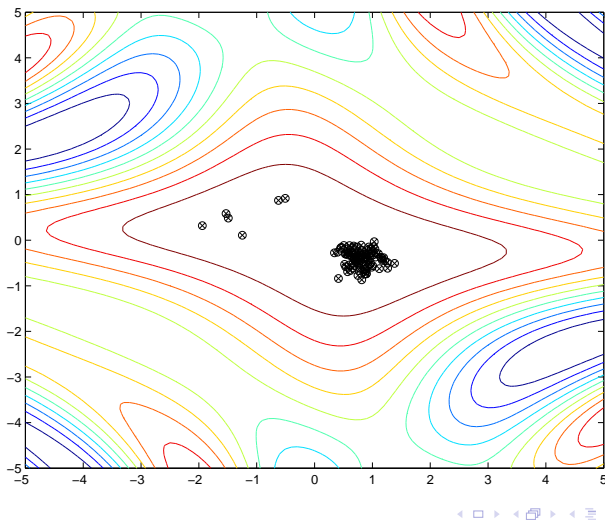
# Mały nacisk selektywny - przykład



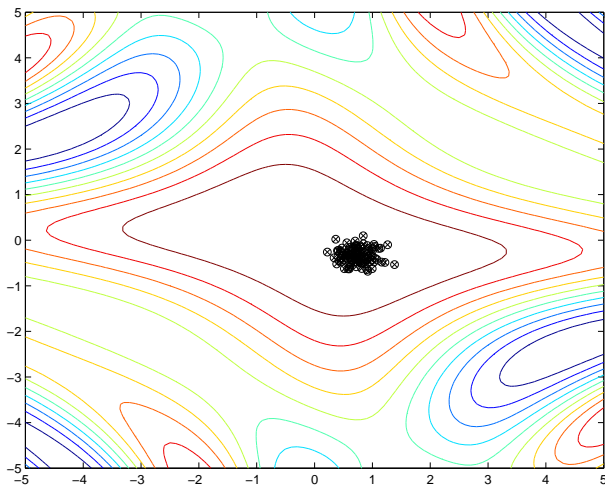
# Mały nacisk selektywny - przykład



# Mały nacisk selektywny - przykład



# Mały nacisk selektywny - przykład



# Agregacja wyników symulacji

- Jak zweryfikować, czy algorytm działa poprawnie? Czy ustalone parametry są dobre?

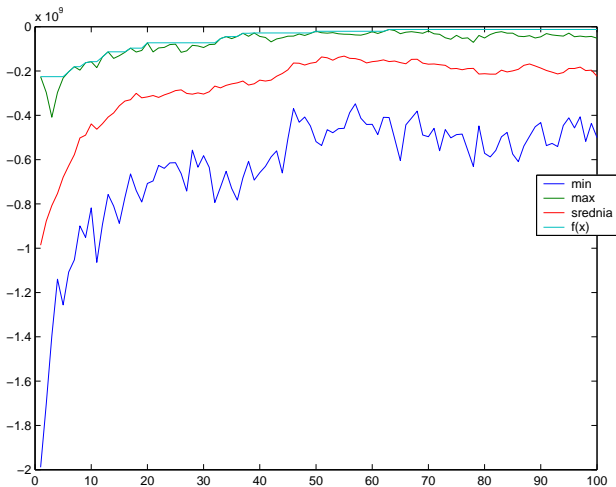
# Agregacja wyników symulacji

- Jak zweryfikować, czy algorytm działa poprawnie? Czy ustalone parametry są dobre?
- Należy śledzić symulację algorytmu!

# Agregacja wyników symulacji

- Jak zweryfikować, czy algorytm działa poprawnie? Czy ustalone parametry są dobre?
- Należy śledzić symulację algorytmu!
- Najczęściej śledzone są
  - Najmniejsza wartość przystosowania wśród osobników w danej generacji,
  - Największa wartość przystosowania wśród osobników w danej generacji,
  - Średnia wartość przystosowania osobników w generacji,
  - Wariancja przystosowania osobników w generacji,
  - Wariancja poszczególnych genów w chromosomach,
  - Wartość przystosowania najlepszego osobnika we **wszystkich** dotychczasowych generacjach,

# Przykładowa symulacja



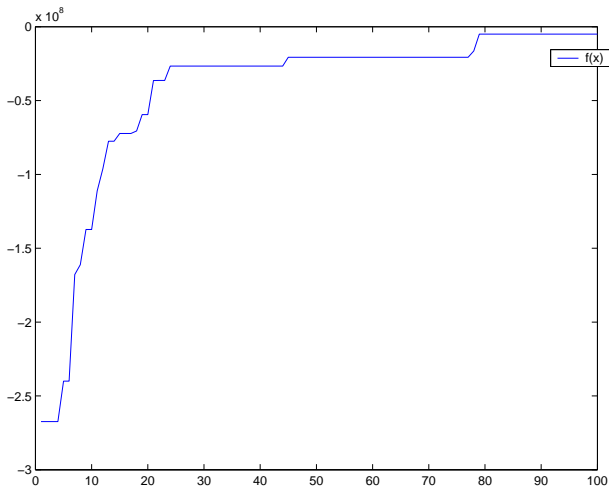


# Stochastyczność algorytmu

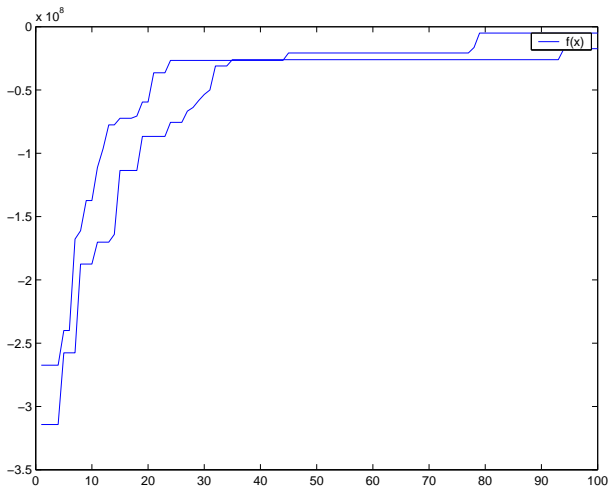
- **Algorytm genetyczny jest algorytmem stochastycznym,**
- Każde z uruchomień algorytmu jest różne, w szczególności
  - Inne może być znalezione rozwiązanie optymalne,
  - Warunek stopu algorytmu może zajść wcześniej lub później,
  - Kolejne generacje osobników nie są takie same,
  - Populacja startowa najczęściej nie jest identyczna
- Wnioskowanie o generalnych własnościach algorytmu w oparciu o jedną realizację najczęściej jest **błędne,**
- Konieczne jest wnioskowanie statystyczne (przez uśrednianie), oparte o wielokrotną symulację działania,
- Niekiedy uśrednianie gubi istotne własności pojedynczych realizacji (na przykład dużą zmienność chwilową).



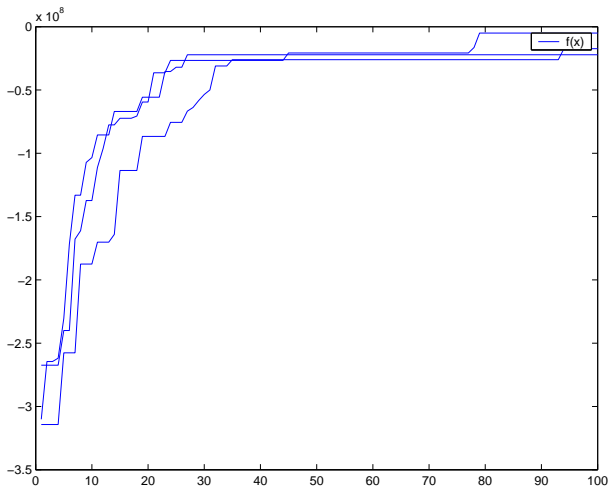
# Stochastyczność algorytmu - przykład



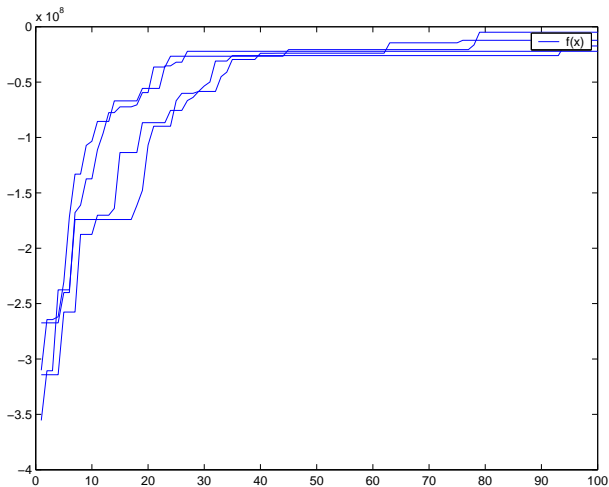
# Stochastyczność algorytmu - przykład



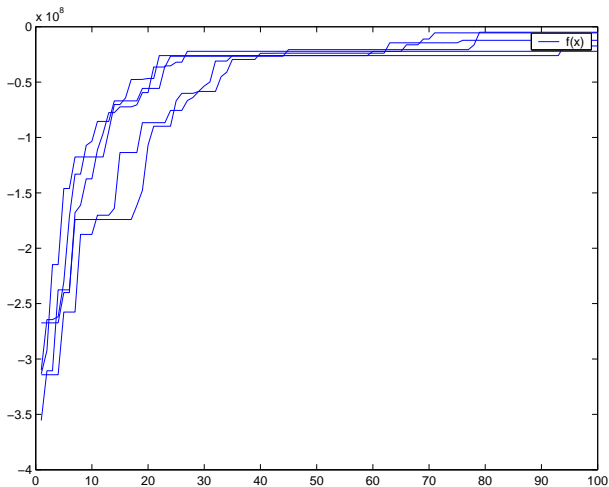
# Stochastyczność algorytmu - przykład



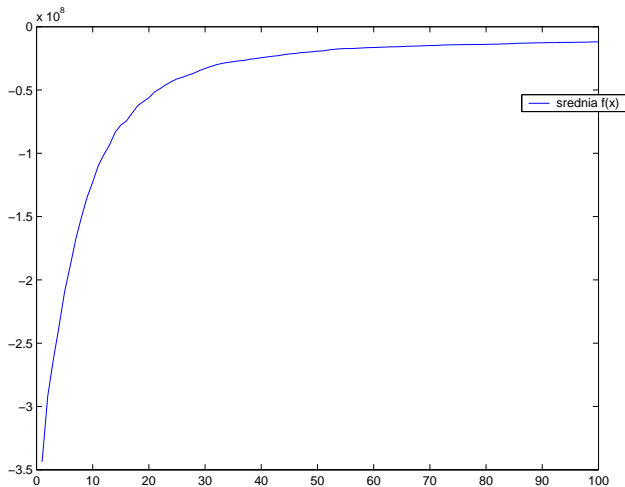
# Stochastyczność algorytmu - przykład



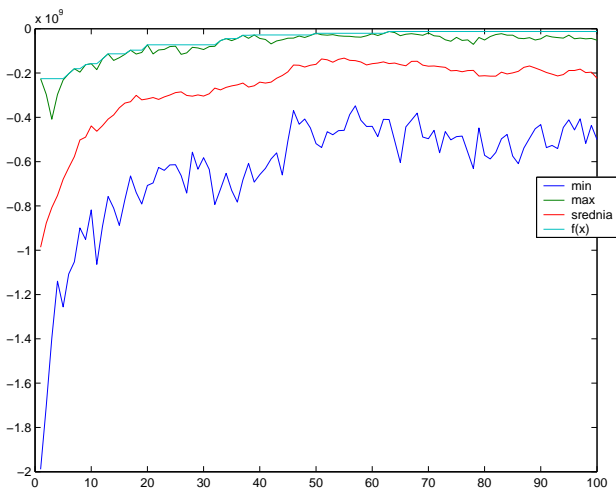
# Stochastyczność algorytmu - przykład



# Stochastyczność algorytmu - przykład II

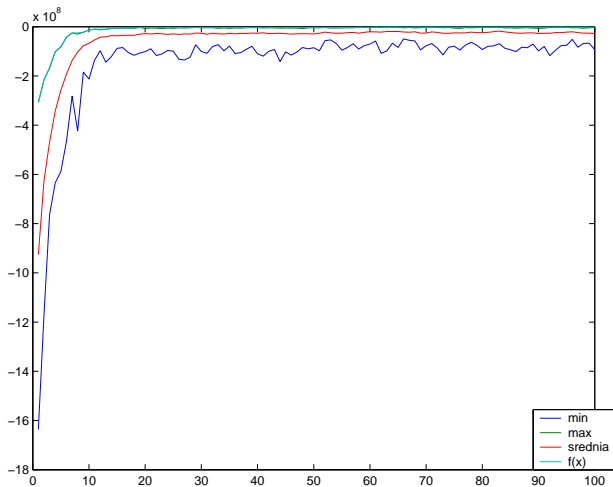


# Wpływ nacisku selektywnego

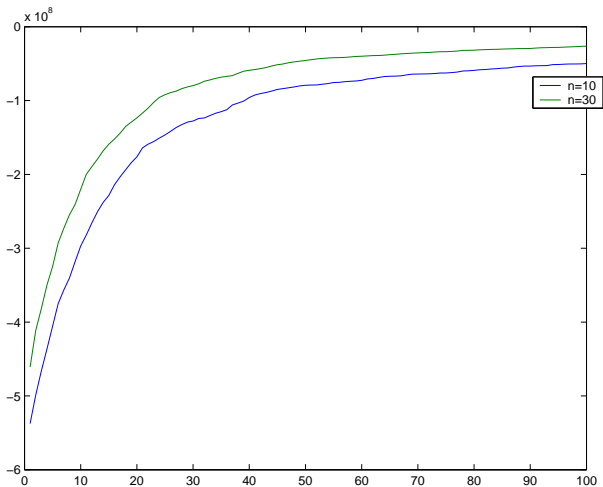




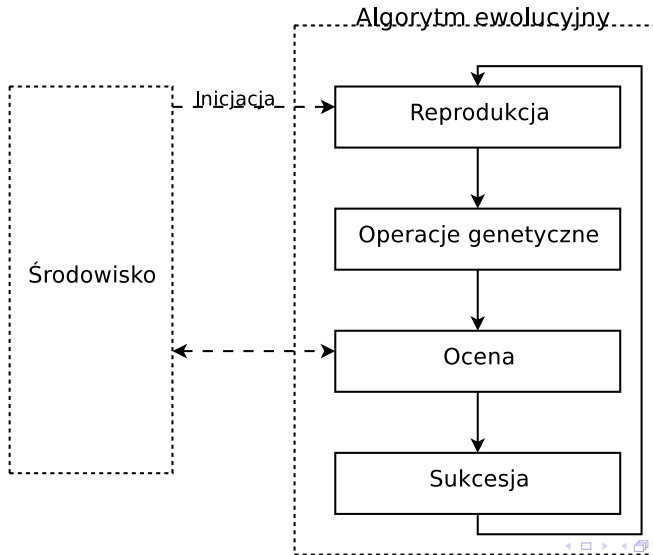
# Wpływ nacisku selektywnego



# Wpływ liczebności populacji



# Metody reprodukcji



# Reprodukcja proporcjonalna (ruletkowa)

- Prawdopodobieństwo reprodukcji osobnika  $X$  w populacji  $P^t$

$$p_r(X) = \frac{f(X)}{\sum_{Y \in P^t} f(Y)}$$

- Prawdopodobieństwo wyboru osobnika jest proporcjonalne do jego przystosowania,
- Wady:
  - Wartości funkcji przystosowania nie mogą być ujemne,
  - Prawdopodobieństwa zależą od skali funkcji przystosowania,
  - Nacisk selektywny zależy od „poziomu” funkcji przystosowania.
  - Nacisk selektywny zmniejsza się wraz ze zwiększaniem się funkcji przystosowania populacji.



# Wada reprodukcji ruletkowej

## Przykład

Weźmy dwie funkcje przystosowania  $f(x)$  oraz  $g(x)$  daną jako

$$g(x) = f(x) + \alpha$$

Założmy, że w populacji są tylko dwa osobniki  $x$  oraz  $y$ , gdzie  $f(y) = f(x) + \beta$ . Prawdopodobieństwo wyboru osobnika  $x$  dla  $f(x)$  wynosi

$$p_r = \frac{f(x)}{f(x) + f(y)} = \frac{f(x)}{2f(x) + \beta}$$

Natomiast w przypadku drugim wynosi

$$p'_r = \frac{g(x)}{g(x) + g(y)} = \frac{f(x) + \alpha}{f(x) + f(y) + 2\alpha} = \frac{f(x)}{2f(x) + 2\alpha + \beta} < p_r$$



# Zmodyfikowana reprodukcja proporcjonalna

- Eliminuje wady reprodukcji ruletkowej,
- Prawdopodobieństwo wyboru osobnika dane jest wzorem

$$p_r(X) = \frac{\bar{f}(X)}{\sum_{Y \in P^t} \bar{f}(Y)}$$

gdzie  $\bar{f}$  to zmodyfikowana funkcja przystosowania dana wzorem

$$\bar{f}(x) = f(x) - f_{min}$$

gdzie  $f_{min}$  to najmniejsza wartość funkcji przystosowania osobnika w populacji

$$f_{min} = \min_{x \in P^t} f(x)$$



# Reprodukcja rangowa

- Wybór osobników na podstawie **rangi** osobnika,
- Osobniki szeregowane są w kolejności według wartości funkcji przystosowania,
- Numer w tym szeregowaniu to ranga (0, 1, 2, ...),
- Prawdopodobieństwo reprodukcji dane jest funkcją określoną na randze osobnika,
- Postać funkcji musi być określona przez projektanta
- Możliwości postępowania przy jednakowej wartości funkcji przystosowania
  - Nadanie różnych rang (wyższa dla losowego osobnika),
  - Nadanie tych samych rang,
- Pozbawiona wad reprodukcji ruletkowej

# Funkcje rangowe I

## Funkcja liniowa

$$p_r(X) = a + k \left( 1 - \frac{r(X)}{r_{max}} \right)$$

gdzie  $a$  oraz  $k$  są parametrami dobieranymi tak, aby spełnić

$$\sum_{X \in P^t} p_r(X) = 1 \quad 0 \leq P(X) \leq 1$$

oraz dodatkowo

$$\text{Jeśli } r(X) \geq r(Y) \text{ to } p_r(X) \leq p_r(Y)$$





# Funkcje rangowe II

## Funkcja potęgowa

$$p_r(X) = a + k(r_{max} - r(X))^\alpha$$

gdzie  $a$ ,  $k$  oraz  $\alpha$  są parametrami dobieranymi tak, aby spełnić

$$\sum_{X \in P^t} p_r(X) = 1 \quad 0 \leq P(X) \leq 1$$

oraz dodatkowo

$$\text{Jeśli } r(X) \geq r(Y) \text{ to } p_r(X) \leq p_r(Y)$$



# Reprodukcja turniejowa

- Z populacji wybieranych jest  $q$  osobników do „turnieju” (zbiór  $Q$ ),
- Każdy z osobników wybierany jest przez losowanie
  - Ze zwracaniem,
  - Bez zwracania,
- Losowanie jest z rozkładem jednostajnym (każdy ma jednakowe szanse trafić do turnieju),
- Do populacji potomnej przechodzi osobnik  $X^*$ , który zwycięży turniej

$$\forall Y \in Q \quad f(X^*) \geq f(Y)$$

- Jedna z najprostszych i najsukuteczniejszych metod



## Reprodukcja turniejowa II

- Jest to szczególny przypadek reprodukcji rangowej,
- Prawdopodobieństwo reprodukcji w losowaniu bez zwracania

$$p_r(X) = \frac{q}{n} \prod_{k=1}^{q-1} \frac{n - r(X) - k}{n - k}$$

- Prawdopodobieństwo reprodukcji w losowaniu ze zwracaniem

$$p_r(X) = \frac{q}{n} \left( \frac{n - r(X) - k}{n - k} \right)^{q-1}$$

- Wariant ze zwracaniem jest mniej selektywny,
- Parametr  $q$  modyfikuje nacisk selektywny (jak?)



# Reprodukcja progowa

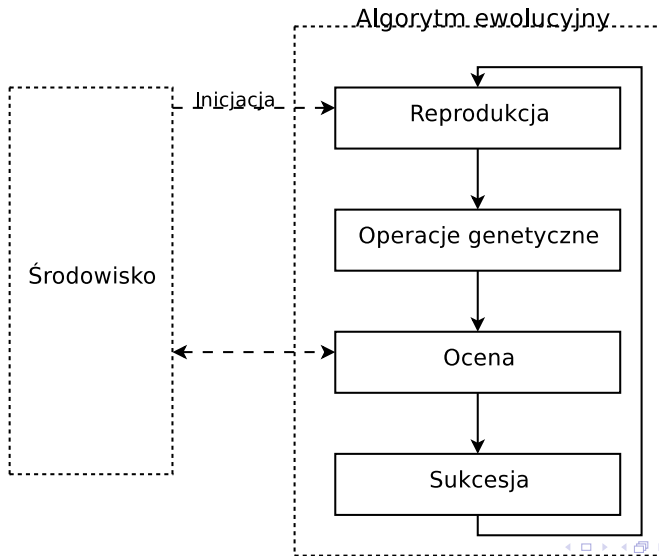
- Szczególny przypadek reprodukcji rangowej,
- Wszystkie osobniki, które są odpowiednio wysoko w hierarchii rangowej mają równe prawdopodobieństwo reprodukcji,
- Prawdopodobieństwo dane wzorem

$$p_r(X) = \begin{cases} \frac{1}{\rho n} & \text{dla } 0 \leq r(X) < \rho n \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Parametr  $\rho$  modyfikuje nacisk selektywny (jak?),
- Skrajnym przypadkiem jest  $\rho = \frac{1}{n}$



# Metody sukcesji



# Sukcesja trywialna

- Wszystkie osobniki po operacjach genetycznych przechodzą do następnej generacji,
- Nową populacją bazową staje się aktualna populacja potomna,
- Operacje genetyczne nie mogą zmieniać ilości osobników w populacji,
- Nie wprowadza nacisku selektywnego,
- Najprostsza i często bardzo skuteczna metoda sukcesji



# Sukcesja z częściowym zastępowaniem

- Do nowej populacji bazowej wybierane są osobniki z
  - Populacji potomnej,
  - Starej populacji bazowej,
- Z populacji bazowej wybieranych jest  $\eta n$  osobników, reszta jest zastępowana
- W szczególnym przypadku, gdy  $\eta = 0$  to jest to sukcesja prosta,
- Można usuwać na przykład
  - Najgorzej przystosowane osobniki,
  - Osobniki najbardziej „podobne” do potomnych,
  - Losowo,
- Daje stabilniejszą pracę algorytmu, wprowadza nacisk selektywny.

# Sukcesja elitarna

- Z populacji potomnej  $P^t$  wybiera się  $\eta$  osobników i dostajemy  $P_\eta^t$ ,
- Kolejną populację bazową tworzy  $\mu$  najlepszych osobników z  $P_\eta^t \cup O^t$
- Wielkość  $\eta$  wpływa na nacisk selektywny (jak?),
- Godne polecenia są schematy z małą  $\eta = 1, 2, 3$





# Kryteria stopu algorytmu

- Określenie ogólnego jest bardzo trudne,
- Najczęściej zależy od
  - Dostępnego czasu,
  - Dostępnej mocy obliczeniowej,
  - Dobrych parametrów algorytmu ewolucyjnego,
- Wyróżniamy grupy kryteriów
  - Związane z rozwiązaniami znalezionymi przez algorytm,
  - Związane z różnorodnością populacji i zdolnościami eksploracyjnymi



# Kryterium maksymalnego kosztu

- Najprostsze kryterium,
- Zatrzymanie po
  - Ustalonej liczbie generacji,
  - Upłygnięciu wyznaczonego czasu,
  - Wykorzystaniu założonej mocy obliczeniowej
- Najczęściej stosowane w praktyce

## Kryterium zadowalającego wyniku

- Algorytm stopowany jest, gdy znajdzie

$$f(\hat{X}(t)) \geq f_s$$

gdzie  $\hat{X}(t)$  jest najlepszym dotychczas znalezionym osobnikiem, a  $f_s$  jest interesującym nas poziomem aspiracji,

- Problemy
  - Skąd wziąć  $f_s$ , jeśli często nie znamy dobrze  $f(x)$ ,
  - Algorytm może działać dowolnie długo, jeśli  $f_s$  zostanie określone nieprawidłowo,
- Należy to kryterium stosować w połączeniu z kryterium maksymalnego kosztu,

# Kryterium szybkości poprawy

- Bazuje na szybkości zmian najlepiej przystosowanego osobnika,
- Algorytm jest zatrzymywany, gdy

$$|f(\hat{X}(t - \tau)) - f(\hat{X}(t))| \leq \varepsilon$$

gdzie  $\tau$  oraz  $\varepsilon$  są parametrami algorytmu

- Zatrzymanie następuje, jeśli w kolejnych  $\tau$  generacjach nie wystąpi poprawa o co najmniej  $\varepsilon$ ,
- Często przyjmuje się  $\varepsilon = 0$



# Kryterium zaniku różnorodności

- Różnorodność w populacji można mierzyć przez
  - Pewną funkcję normy uśrednionego osobnika

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{X \in P^t} X_i$$

- Normę wektora standardowych odchyleń genów

$$\sigma_i(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{X \in P^t} (X_i - \bar{X}_i)^2}$$

- Wektory i wartości własne macierzy kowariancji chromosomów,
- Jeśli różnorodność w populacji jest mała, to algorytm jest zatrzymywany,
- Mała różnorodność świadczy o tym, że algorytm stracił własności eksploracyjne



# Zanik adaptacji mutacji

- Dla algorytmów, gdzie mutacja jest zmienna (strategia  $(\mu, \lambda)$ ),
- Mały zasięg mutacji prowadzi do eksploatacji,
- Algorytm kończy działanie przy dostatecznie małym zasięgu mutacji,

