Metody Rozmyte i Algorytmy Ewolucyjne

mgr inż. Piotr Kaczyński

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Zbiory i logika rozmyta
Wprowadzenie

Plan wykładu

1. Wprowadzenie
   - Geneza
   - Niepewność
2. Zbiory klasyczne i rozmyte
   - Zbiory klasyczne
   - Zbiory rozmyte
   - Podstawowe kasy f. przynależności
3. Operatory na zbiorach rozmytych
   - Operatory sumowania
   - Operatory iloczynu
   - Operator negacji

Geneza

- Chęć opisu skomplikowanych zjawisk i reguł,
- Opis bliski rozumowaniu ludzkiemu,
- Zrozumiały i prosty opis,
- Próba formalizacji rozumowania ludzkiego

Niepewność

- W życiu znajdujemy wiele rodzajów niepewności
  - Stochastyczna — np. rzut kostką,
  - Pomiarowa — np. około 3cm,
  - Niepewność informacyjna — np. wiarygodny kredytobiorca,
  - Lingwistyczna — mały, szybki, ciepły ...
- Wiedza ekspertów jest najczęściej dana w postaci lingwistycznej,

Przykład

Jeśli prędkość jest trochę za duża, to trzeba lekko puścić pedał gazu.
Jeśli prędkość jest bardzo za duża, to należy zdjąć nogę z pedału gazu i lekko nacisnąć pedał hamulca.

Zbiory klasyczne

- Element może należeć lub nie do danego zbioru

$$x \in X \quad \vee \quad x \notin X$$

- Zbiór można definiować przez własność określającą przynależność

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 20\}$$

- Można również przyporządkowywać znaczenia zbiorom

$$\text{młody} = \{x \in M : \text{wiek}(x) \leqslant 20\}$$

Funkcja charakterystyczna zbioru

- Funkcja przyjmująca 1 jeśli dany element należy, 0 w przeciwnym przypadku

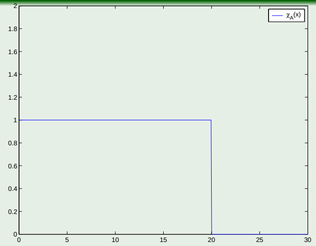
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- Jeśli uniwersum jest $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ to można narysować

Przykład

Zbiór liczb określających młody wiek

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 20\}$$



Zbiory rozmyte

- Uogólnienie zbioru klasycznego, dla którego

$$\chi_A(x)\colon X \to \{0, 1\}$$

- Funkcja charakterystyczna zbioru rozmytego nazywa się funkcją przynależności

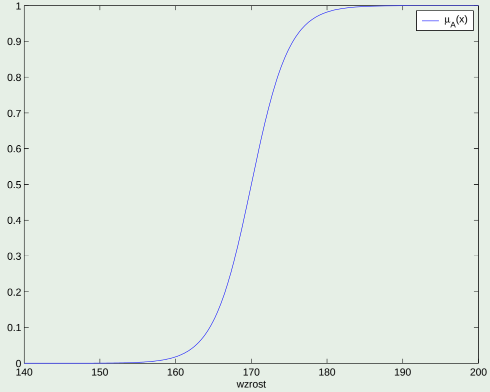
$$\mu_A(x)\colon X \to [0, 1]$$

gdzie X jest uniwersum, pewną przestrzenią,
- Każda z wartości z przedziału $[0, 1]$ może być przyjmowana,
- Funkcja przynależności określa stopień przynależenia danego elementu do zbioru,
  - $\mu_A(x) = 0$ — x na pewno nie należy do zbioru,
  - $\mu_A(x) = 1$ — x na pewno należy do zbioru,
  - $0 < \mu_A(x) < 1$ — x w mniejszym lub większym stopniu należy do zbioru A

Przykłady zbiorów rozmytych

Przykład — wysoki wzrost

$$\mu_A(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tgh}(\frac{1}{5}x - 34) + \frac{1}{2}$$



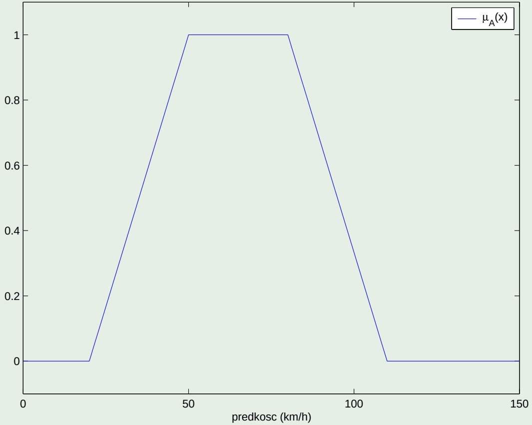
Przykłady zbiorów rozmytych

Przykład — średnia prędkość

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 20 \\ \frac{1}{30}x - \frac{2}{3} & 20 < x \leqslant 50 \\ 1 & 50 < x \leqslant 80 \\ -\frac{1}{30}x + \frac{11}{3} & 80 < x \leqslant 110 \\ 0 & x > 110 \end{cases}$$

Przykłady zbiorów rozmytych

Przykład — średnia prędkość



Uwagi o zbiorach rozmytych

- Zbiory rozmyte uwalniają od konieczności kategoryzacji,
- Wartość stopnia przynależności jest wartością subiektywną
- Często kształt funkcji przynależności jest istotniejszy niż jej wartości,
- Z definicji zbioru rozmytego nie wynika, że funkcja przynależności musi przyjmować gdziekolwiek 1,
- Każdy zbiór klasyczny da się reprezentować jako szczególny zbiór rozmyty,
- Stopień przynależności to nie prawdopodobieństwo! Funkcja przynależności to nie gęstość prawdopodobieństwa!

Przykład

Łysy na 80% to nie łysy 1 na 5 razy!

Definicje

Definition

Zbiór rozmyty A nazywamy normalnym, jeżeli istnieje co najmniej jeden element $x \in X$ taki, że $\mu_A(x) = 1$. Podzbiór rozmyty, który nie jest normalny nazywamy subnormalnym.

Definition

Wysokością zbioru rozmytego nazywamy największy stopień przynależności elementu $x \in X$.

$$\text{height}(A) = \max_x \mu_A(x)$$

Definicje II

Definition

Nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy nierozmyty podzbiór zbioru X dany wzorem

$$supp(A) = \{x : \mu_A(x) > 0 \text{ i } x \in X\}$$

Definition

Jądrem zbioru rozmytego A nazywamy nierozmyty podzbiór zbioru X dany wzorem

$$supp(A) = \{x : \mu_A(x) = 1 \text{ i } x \in X\}$$

Definicje III

Definition

Mówimy, że zbiór rozmyty A jest podzbiorem zbioru rozmytego B, co oznaczamy $A \subset B$ jeżeli dla każdego $x \in X$ mamy $\mu_B(x) \geqslant \mu_A(x)$.

Definition

Mówimy, że dwa podzbiory rozmyte A i B są równe, co oznaczamy $A = B$ jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset A$. Oczywiście wtedy dla każdego $x \in X$ zachodzi $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Definition

Zbiorem rozmytym pustym nazywamy zbiór $\emptyset$ taki, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $\mu_\emptyset(x) = 0$.

Definicje — przykład

Funkcja klasy γ

- Rosnąca

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x < b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

- Malejąca

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & x < a \\ -\frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x < b \\ 0 & x \geqslant b \end{cases}$$

Funkcje klasy t

- Połączenie dwóch funkcji klasy γ

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x < b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leqslant x < c \\ 0 & x \geqslant c \end{cases}$$

- Funkcja trapezoidalna

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x < b \\ 1 & b \leqslant x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leqslant x < d \\ 0 & x \geqslant d \end{cases}$$

Funkcje klasy S

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & a \leqslant x < b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & b \leqslant x < c \\ 1 & x \geqslant c \end{cases}$$

gdzie

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Funkcje klasy S

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & a \leqslant x < b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & b \leqslant x < c \\ 1 & c \leqslant x < d \\ 1 - 2\left(\frac{d-x}{f-d}\right)^2 & d \leqslant x < e \\ 2\left(\frac{f-x}{f-d}\right)^2 & e \leqslant x < f \\ 0 & x > f \end{cases}$$

gdzie

$$b = \frac{a+c}{2} \quad e = \frac{d+f}{2}$$

Operatory na zbiorach rozmytych

- Pozwalają na wnioskowanie,
- Są pewnym uogólnieniem działań na zbiorach klasycznych,
- Wyróżniamy standardowe operacje
  - Sumy zbiorów,
  - Przecięcia zbiorów,
  - Dopełnienia zbioru,
- Wynik operacji najczęściej nie posiada typowej (prostej) postaci,

Operatory sumowania

- Spełniają własność tzw. *s*-normy

Definition

Operator S

$$S\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

nazywamy operatorem *s*-normy, jeżeli spełnia

1. $S(a,b)=S(b,a)$ (przemienność),
2. $S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c)$ (łączność),
3. $S(a,b)\geqslant S(c,d)$ dla $a\geqslant c$, $b\geqslant d$ (monotoniczność),
4. $S(a,0)=a$ (tożsamość zera),

Typowe operatory sumowania I

- Maksimum

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- Suma algebraiczna

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

- Suma Hamachera

$$\mu_{A \cup B} = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x)}{1 - \mu_A(x)\mu_B(x)}$$

- Suma Einsteina

$$\mu_{A \cup B} = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x)\mu_B(x)}$$

Typowe operatory sumowania II

- Suma drastyczna

$$\mu_{A\cup B} = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) & \text{dla} \quad \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- Suma ograniczona

$$\mu_{A\cup B} = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$$

Operatory iloczynu

- Spełniają własność tzw. t-normy

Definition

Operator T

$$S\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

nazywamy operatorem t-normy, jeżeli spełnia

1. $T(a,b) = T(b,a)$ (przemienność),
2. $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ (łączność),
3. $T(a,b) \geqslant T(c,d)$ dla $a \geqslant c$, $b \geqslant d$ (monotoniczność),
4. $T(a,1) = a$ (tożsamość jedynki),

Typowe operatory iloczynu I

- Minimum

$$\mu_{A\cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- Iloczyn

$$\mu_{A\cap B} = \mu_A(x)\mu_B(x)$$

- Iloczyn Hamachera

$$\mu_{A\cap B} = \frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)}$$

- Iloczyn Einsteina

$$\mu_{A\cap B} = \frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))}$$

Typowe operatory iloczynu II

- Suma drastyczna

$$\mu_{A\cap B} = \begin{cases} \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) & \text{dla} \quad \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1 \\ 0 & \quad\quad \text{w.p.p} \end{cases}$$

- Różnica ograniczona

$$\mu_{A\cap B} = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$$

- Ogólna definicja

Definition

Odwzorowanie $N\colon [0,1] \to [0,1]$ nazywamy operatorem negacji, jeżeli spełnia

1. $N(1) = 0;\ N(0) = 1$ (ograniczenie),
2. Jeżeli $a > b$, to $N(a) \leqslant N(b)$ (odwracanie porządku),
3. $N(N(a)) = a$

- Stosuje się

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- Można wprowadzić ogólne prawo De Morgana wiążące s-normy z t-normami

$$S(a,b) = 1 - T(\bar{a},\bar{b})$$

- Wybrane operatory muszą spełniać to prawo (być dualne względem siebie)