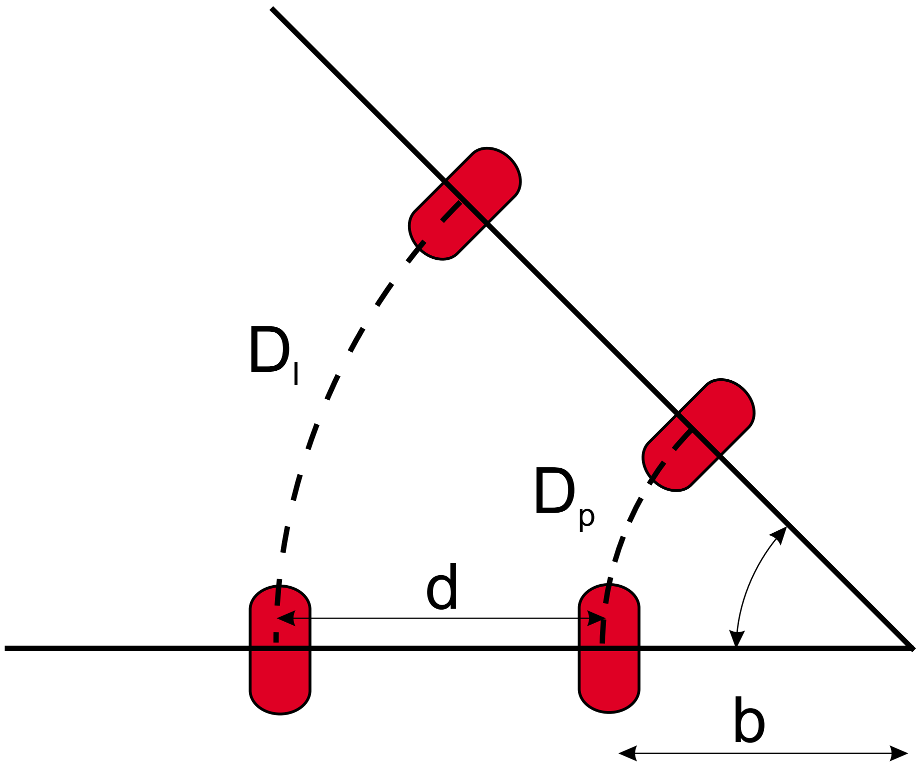
Rodzaje baz jezdnych robotów mobilnych

- **Napęd różnicowy** – dwa niezależnie napędzane koła jednej osi, dla zachowania równowagi dodane jest trzecie koło bierne (lub dwa bierne koła)
- **Napęd synchroniczny** – trzy napędzane koła w układzie trójkątnym, wszystkie skierowane w jednym kierunku z możliwością zmiany kierunku ruchu bez zmiany orientacji bazy
- **Napęd dookólny (wielokierunkowy)** – podobny do napędu synchronicznego, ale każde koło jest złożonym mechanizmem i może toczyć się w dowolnym kierunku
- **Napęd Ackermana (samochód kinematyczny)** – typowy czterokołowy pojazd, napęd na dwa koła (zazwyczaj przednie) jednej osi i dwa koła drugiej osi nie są napędzane

Napęd różnicowy:



Rys. 1: Napęd różnicowy – skręt w prawo

Przemieszczenie i orientacja robota:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + D\sin\theta \\ y_{n+1} = y_n + D\cos\theta \end{cases}$$

gdzie D – przemieszczenie robota, θ – orientacja robota

$$D = \frac{D_l + D_p}{2}$$

gdzie D_l, D_p przemieszczenie lewego i prawego koła,

Dla lewego koła mamy

$$C_l = 2\,\pi(b + d)$$

gdzie d – efektywny rozstaw kół, b – promień skrętu prawego koła

$$\frac{D_l}{C_l} = \frac{\theta}{2\,\pi}$$

z powyższych zależności otrzymujemy orientację robota

$$\theta = \frac{D_l}{b + d} \tag{1}$$

Dla koła prawego mamy

$$C_p = 2\,\pi b$$

$$\frac{D_p}{C_p} = \frac{\theta}{2\,\pi}$$

$$b = \frac{D_p}{\theta} \tag{2}$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy

$$\theta = \frac{D_l - D_p}{d} \tag{3}$$

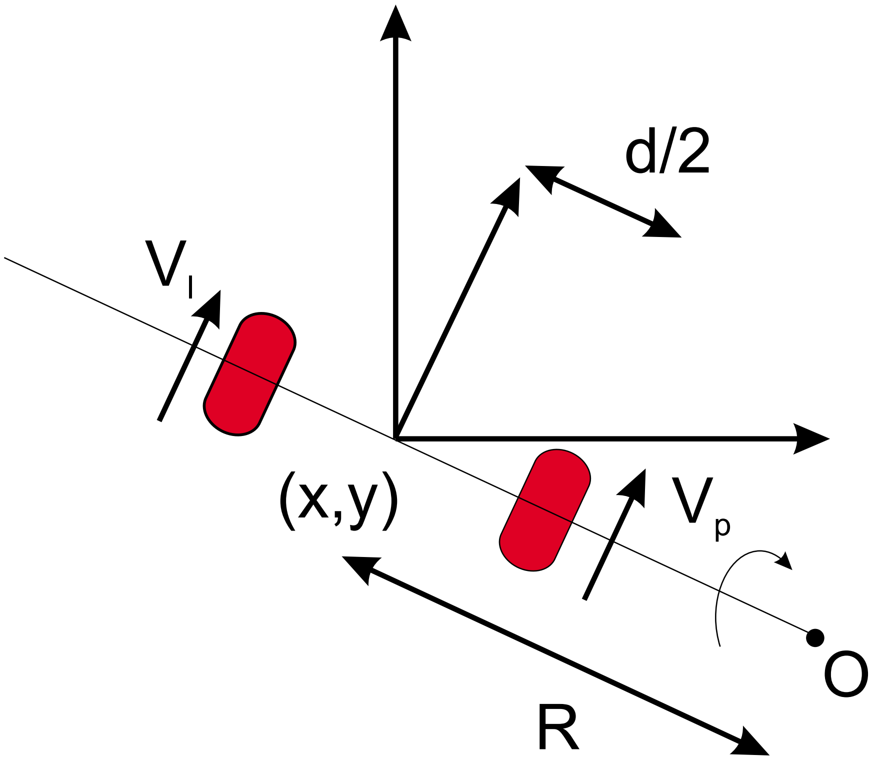
Orientacja robota nie zależy od toru ruchu.

Obliczanie przemieszczeń kół:

$$D_i = \frac{2\,\pi N_i}{C_i} R_{ei}, \qquad i = l, p \tag{4}$$

gdzie:
N_i – liczba odczytanych z enkodera impulsów koła i,
C_i – rozdzielczość enkodera (liczba impulsów na jeden obrót koła i,
R_{ei} – efektywny promień koła i

Koła poruszają się z tą samą prędkością kątową ω wokół chwilowego środka obrotu O



Rys. 2: Napęd różnicowy – prędkość liniowa i obrotowa

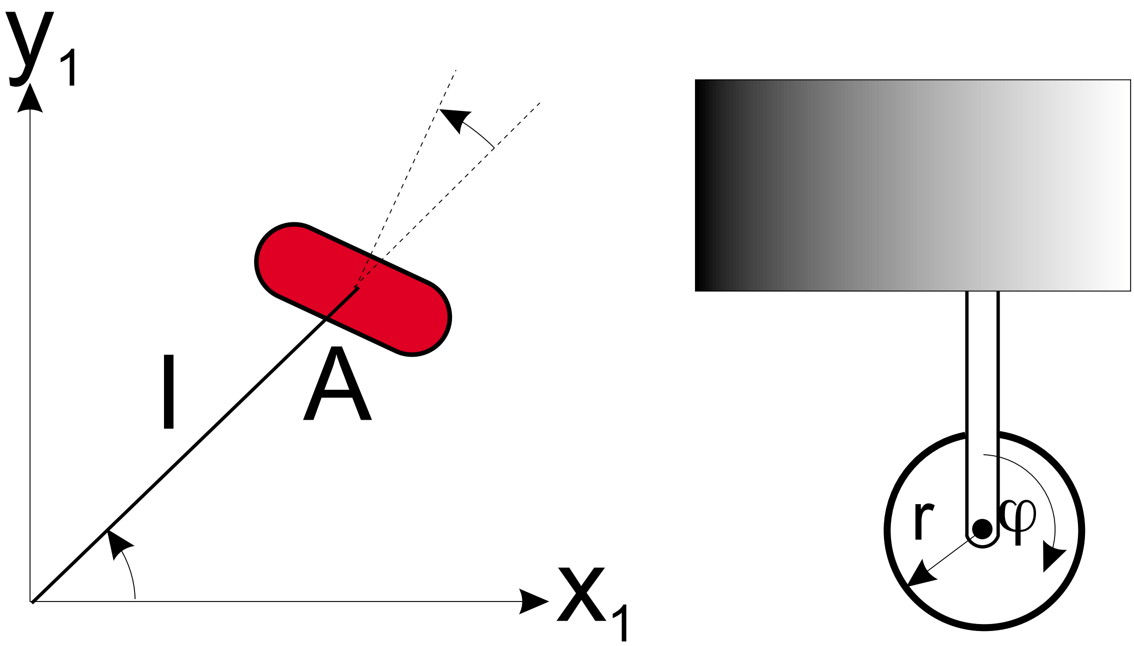
$$\omega(R + \frac{d}{2}) = v_p$$

$$\omega(R - \frac{d}{2}) = v_l,$$

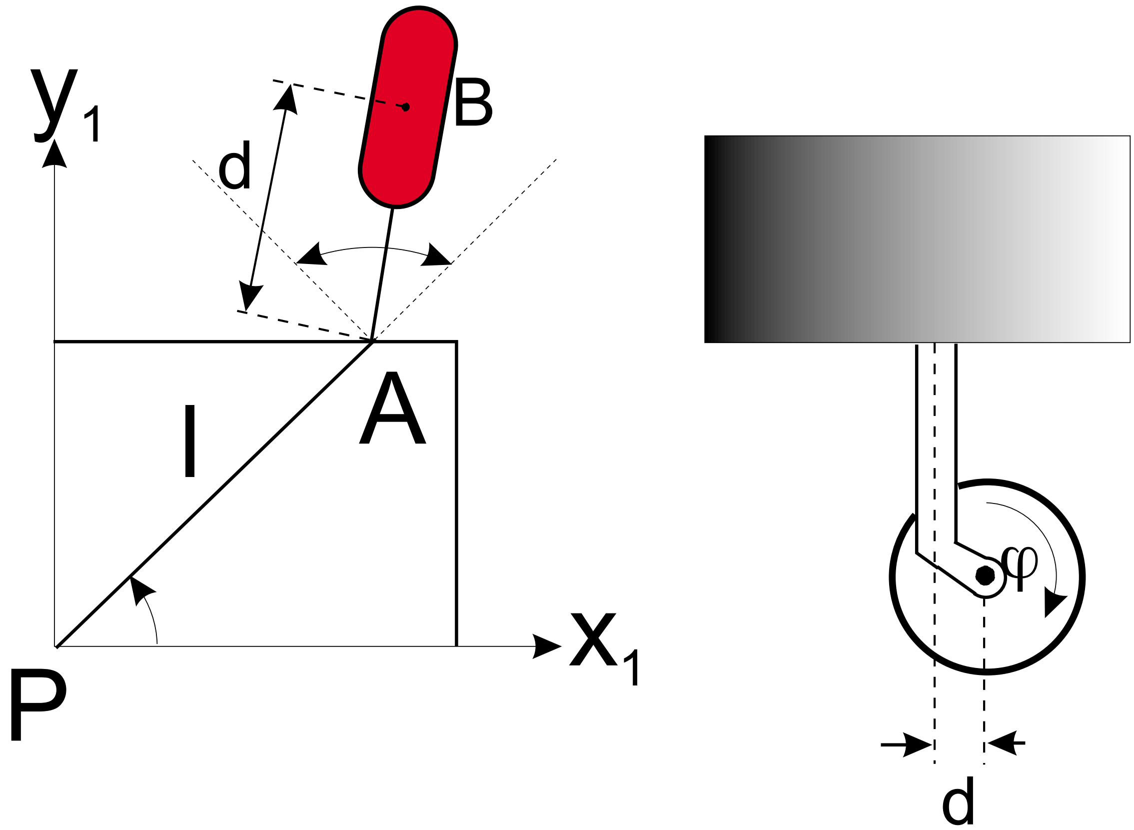
wielkości ω, v_r, v_l oraz R są zmiennymi. Dla dowolnej chwili czasu

$$R = \frac{d}{2}\frac{v_p + v_l}{v_l - v_p}, \qquad \omega = \frac{v_l - v_p}{d}$$

Przykładowe typy kół



Rys. 3: Koło stałe $\beta = const$ i orientowalne względem środka koła $\beta = \beta(t)$



Rys. 4: Koło orientowalne $\beta = \beta(t)$ względem osi nie przechodzącej przez środek koła

Więzy (ograniczenia) ruchu pojedynczego koła

I. Koło zwykłe

Ia. koło stałe

wzdłuż płaszczyzny koła (brak poślizgu wzdłużnego)

$$[-\sin(\alpha+\beta)\ \cos(\alpha+\beta)\ l\cos(\beta)]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)+r\dot{\varphi}(t)=0 \tag{5}$$

ortogonalne do płaszczyzny koła (brak poślizgu bocznego)

$$[\cos(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha+\beta)\ l\sin(\beta)]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=0 \tag{6}$$

Ib. koło orientowalne względem środka

wzdłuż płaszczyzny koła (brak poślizgu wzdłużnego)

$$[-\sin(\alpha+\beta(t))\ \cos(\alpha+\beta(t))\ l\cos(\beta(t))]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)+r\dot{\varphi}(t)=0 \tag{7}$$

ortogonalne do płaszczyzny koła (brak poślizgu bocznego)

$$[\cos(\alpha+\beta(t))\ \sin(\alpha+\beta(t))\ l\sin(\beta(t))]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=0 \tag{8}$$

Ic. koło orientowalne mimośrodowo

wzdłuż płaszczyzny koła (brak poślizgu wzdłużnego)

$$[-\sin(\alpha+\beta(t))\ \cos(\alpha+\beta(t))\ l\cos(\beta(t))]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)+r\dot{\varphi}(t)=0 \tag{9}$$

ortogonalne do płaszczyzny koła (brak poślizgu bocznego)

$$[\cos(\alpha+\beta(t))\ \sin(\alpha+\beta(t))\ d+l\sin(\beta(t))]\ R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)+d\,\dot{\beta}(t)=0 \tag{10}$$

II. koło szwedzkie

$$\begin{aligned}[-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\ \cos(\alpha+\beta+\gamma)\ l\cos(\beta+\gamma)]\,R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}\\ +r\cos\gamma\dot{\varphi}=0\end{aligned} \tag{11}$$

Wprowadzamy oznaczenia na kąty obrotu kół

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}\varphi_f(t)\\ \varphi_c(t)\\ \varphi_{oc}(t)\\ \varphi_{sw}(t)\end{bmatrix}$$

Ograniczenia (więzy) ruchu można wyrazić w ogólnej postaci

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} + J_2\dot{\varphi} = 0 \tag{12}$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} + C_2\dot{\beta}_{oc} = 0 \tag{13}$$

przy czym

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{bmatrix}, C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix}, C_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{bmatrix}$$

gdzie powyższe macierze otrzymano z (5), (7), (9) i (11). Macierze J_{1f} i J_{1sw} są stałe pozostałe są zmienne. J_2 jest stała, której elementy na diagonali są promieniami kół, z wyjątkiem kół szwedzkich dla których elementy te są $r\cos\gamma$. Rozważmy pierwszych $N_f + N_c$ równań więzów (13)

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0 \tag{14}$$

$$C_{1c}(\beta_c)R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0 \tag{15}$$

Z powyższych równań wynika, że wektor $R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}}$ należy do przestrzeni zerowej macierzy

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} \tag{16}$$

tzn. $R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c))$. Jeśli $\mathrm{rank}\ (C_1^*(\beta_c)) = 3 \;\Rightarrow\; R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$ i ruch na płaszczyźnie jest niemożliwy.

Stopień mobilności robota δ_m:

$$\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = 3 - \mathrm{rank}(C_1^*(\beta_c))$$

Rozważamy roboty niezdegenerowane, tzn. spełniające założenia:

1. Jeśli robot ma więcej niż jedno zwykłe stałe koło (tj. $N_f > 1$, to koła te mają wspólną oś, czyli $\operatorname{rank} C_{1f} \leq 1$
2. Środki kół orientowalnych względem prostej przechodzącej przez środek koła nie są współosiowe z kołami stałymi, czyli $\operatorname{rank} C_1^*(\beta_c) = \operatorname{rank} C_{1f} + \operatorname{rank} C_{1c}(\beta_c)$
3. Liczba $\operatorname{rank} C_{1c}(\beta_c) \leq 2$ jest liczbą kół orientowalnych względem prostej przechodzącej przez środek koła, które mogą być orientowane niezależnie dla kierowania robotem. Liczba ta jest nazywana **stopniem sterowności (kierowalności) robota** δ_s:
$$\delta_s = \operatorname{rank} C_{1c}(\beta_c)$$

Można wyróżnić pięć nieosobliwych struktur spełniających praktyczne warunki:

1. stopień mobilności jest z zakresu
$$1 \leq \delta_m \leq 3 \tag{17}$$
Rozważamy tylko takie przypadki gdy ruch jest możliwy.
2. stopień sterowności jest z zakresu
$$0 \leq \delta_s \leq 2 \tag{18}$$
Górna granica jest osiągana dla robotów bez stałych kół ($N_f = 0$), dolna granica jest osiągana, gdy robot nie ma kół orientowalnych względem prostej przechodzącej przez środek koła
3. spełniona jest ponadto nierówność
$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3 \tag{19}$$

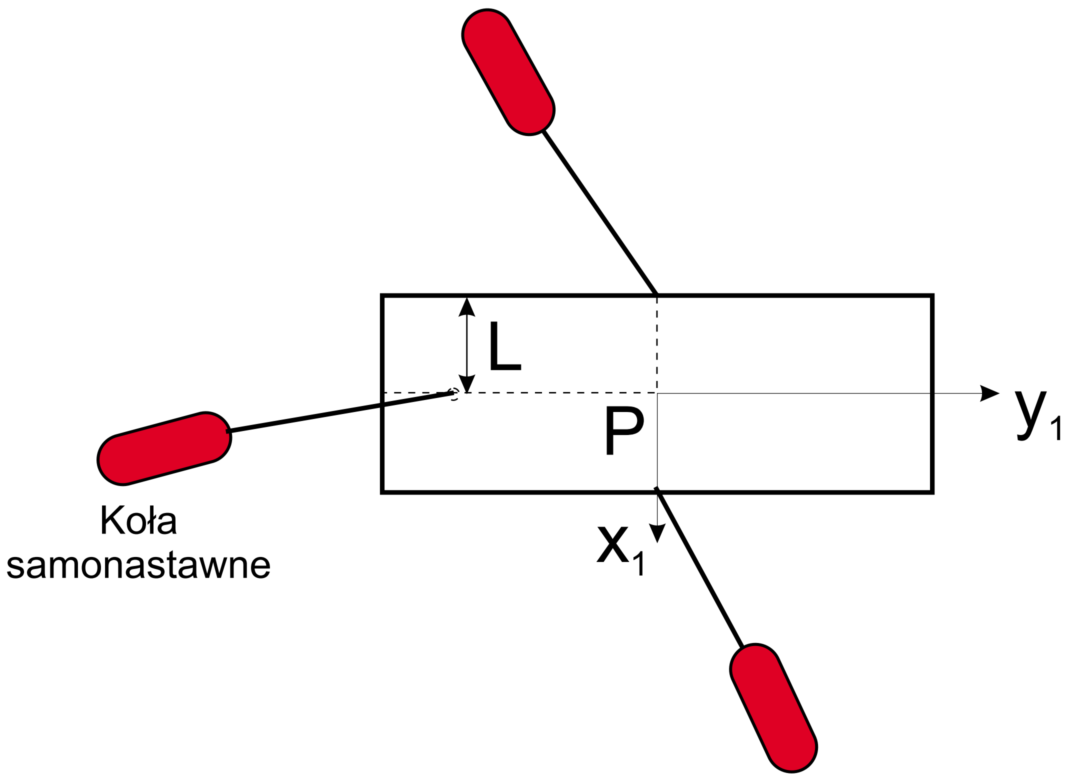
Istnieje zatem pięć typów robotów kołowych mających praktyczne znaczenie, dla których spełnione są warunki (17), (18), (19) i odpowiada to parom:

δ_m	3	2	2	1	1
δ_s	0	0	1	1	2

Typy robotów trójkołowych

Typ (3, 0) – robot nie ma stałych kół i nie ma kół orientowalnych względem prostej przechodzącej przez środek koła. Są to roboty dookólne mogące poruszać się w każdej chwili w dowolnym kierunku na płaszczyźnie bez zmiany orientacji tzn. mają pełną mobilność.

koła	α	β	l
1oc	0	-	L
2oc	π	-	L
3oc	$\frac{3\pi}{2}$	-	L



Rys. 5: Robot z możliwością ruchu w dowolnym kierunku bez reorientacji, $\delta_m = 3,\ \delta_s = 0$

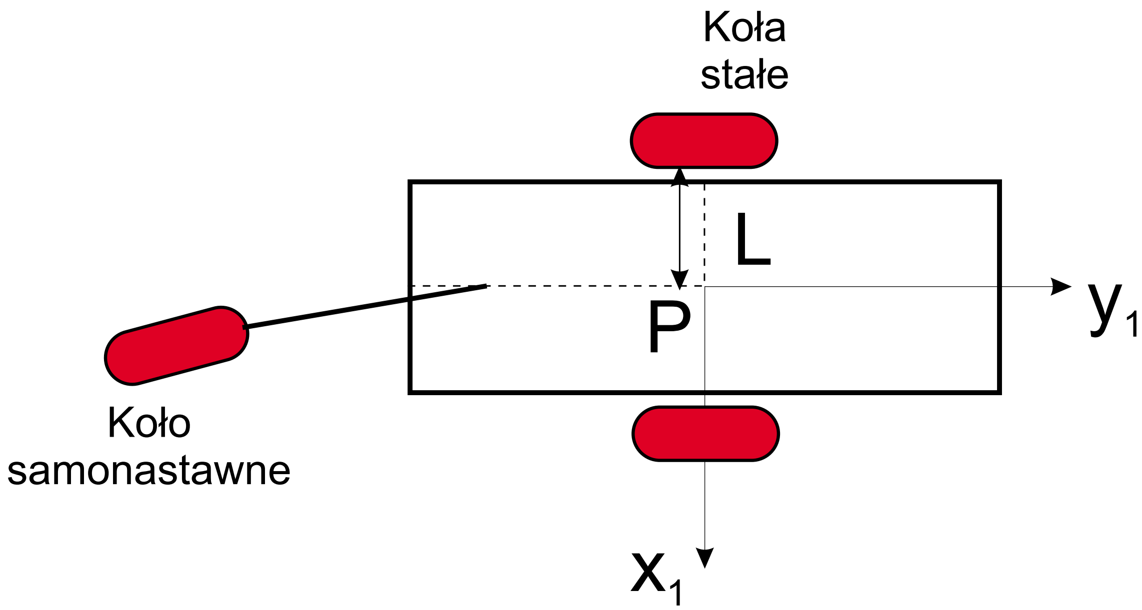
Macierze w równaniach więzów mają następującą postać:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & L\cos\beta_1 \\ \sin\beta_2 & -\cos\beta_2 & L\cos\beta_2 \\ \cos\beta_3 & \sin\beta_3 & L\cos\beta_3 \end{bmatrix}; J_2 = \mathrm{diag}(r)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \sin\beta_1 & d + L\sin\beta_1 \\ -\cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & d + L\sin\beta_2 \\ \sin\beta_3 & -\cos\beta_3 & d + L\sin\beta_3 \end{bmatrix}; C_2 = \mathrm{diag}(d)$$

Typ (2, 0) – robot nie ma kół orientowalnych, ma jedno lub kilka kół stałych na wspólnej osi.

koła	α	β	l
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3oc	$\frac{3\pi}{2}$	-	L



Rys. 6: Robot z kołami stałymi na jednej osi i jednym samonastawnym, $\delta_m = 2,\ \delta_s = 0$

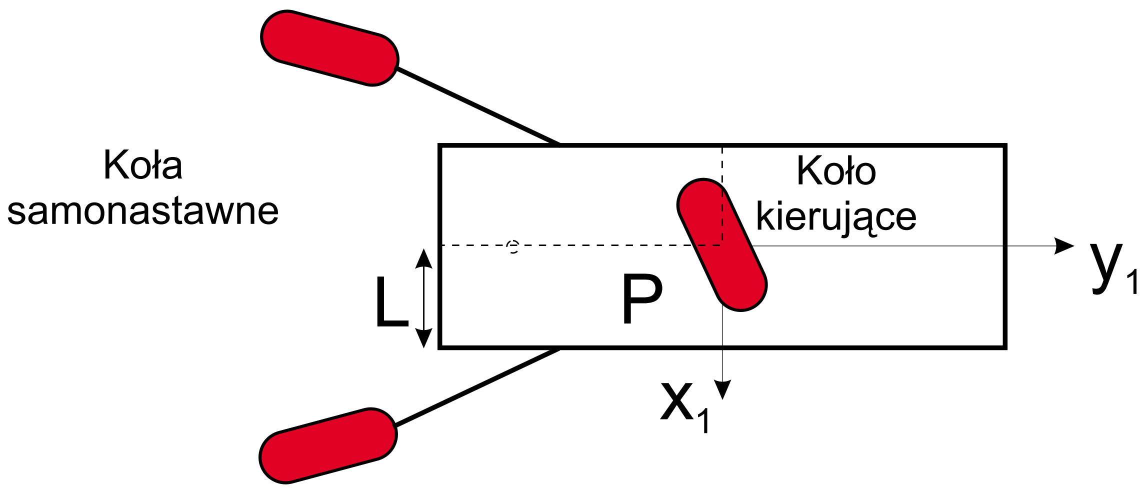
Macierze w równaniach więzów mają następującą postać:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos\beta_3 & \sin\beta_3 & L\cos\beta_3 \end{bmatrix}; J_2 = \mathrm{diag}(r)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_3 & -\cos\beta_3 & d + L\sin\beta_3 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Typ (2, 1) – robot nie ma kół stałych. Ma co najmniej jedno koło sterowne (orientowalne), jeśli jest więcej kół orientowalnych to muszą być one koordynowane tak aby $\delta_s = 1$. na wspólnej osi.

koła	α	β	l
1c	0	-	0
2oc	$\frac{5\pi}{4}$	-	$\sqrt{2}L$
3oc	$\frac{7\pi}{4}$	-	$\sqrt{2}L$



Rys. 7: Robot z kołem kierującym i dwoma samonastawnymi, $\delta_m = 2$, $\delta_s = 1$

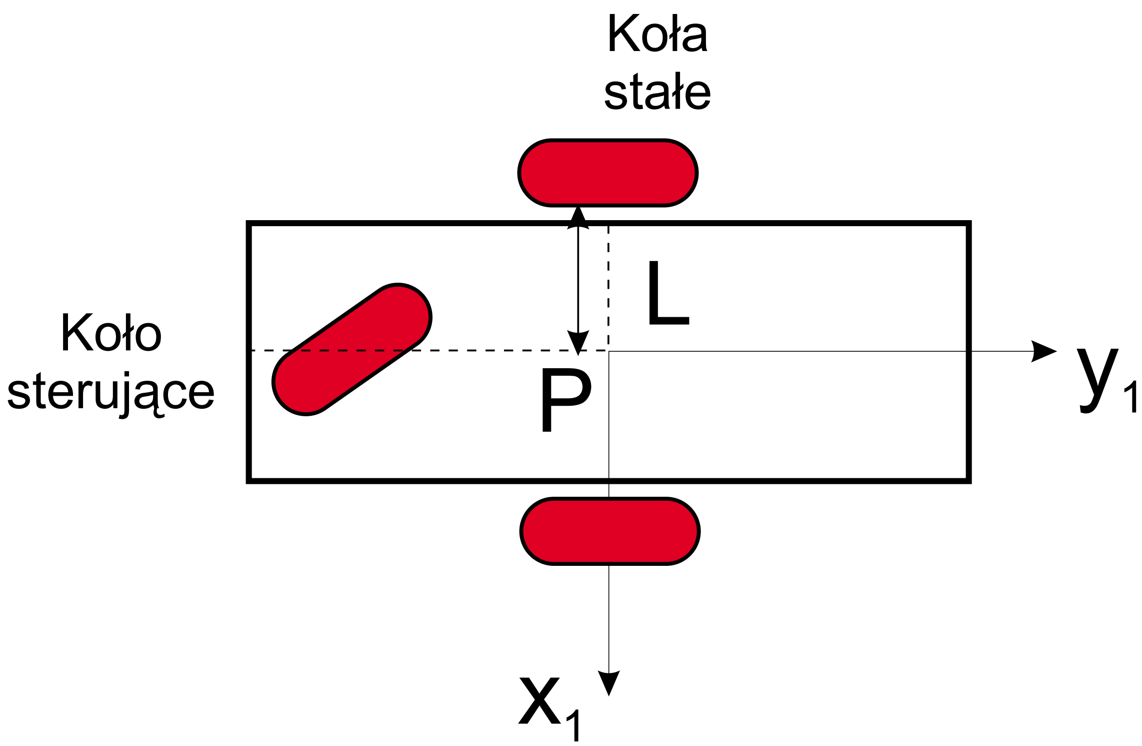
Macierze w równaniach więzów mają następującą postać:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & l\cos\beta_1 \\ \sin(\beta_2 + \frac{\pi}{4}) & -\cos(\beta_2 + \frac{\pi}{4}) & l\cos\beta_2 \\ -\sin(\beta_3 - \frac{\pi}{4}) & \sin(\beta_3 - \frac{\pi}{4}) & l\cos\beta_3 \end{bmatrix}; J_2 = \operatorname{diag}(r)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \sin\beta_1 & l\sin\beta_1 \\ -\cos(\beta_2 + \frac{\pi}{4}) & -\sin(\beta_2 + \frac{\pi}{4}) & d + l\sin\beta_2 \\ \cos(\beta_3 - \frac{\pi}{4}) & \sin(\beta_3 - \frac{\pi}{4}) & d + l\sin\beta_3 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{diag}(d) \end{bmatrix}$$

Typ (1, 1) – robot ma jedno lub więcej kół stałych na wspólnej osi i co najmniej jedno koło orientowalne (kierowalne), którego środek nie leży na osi łączącej koła stałe (np. samochód kinematyczny, dziecięcy rower trójkołowy). na wspólnej osi.

koła	α	β	l
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3c	$\frac{3\pi}{2}$	-	L



Rys. 8: Robot z dwoma stałymi kołami i jednym kierującym (samochód), $\delta_m = 1,\ \delta_s = 1$

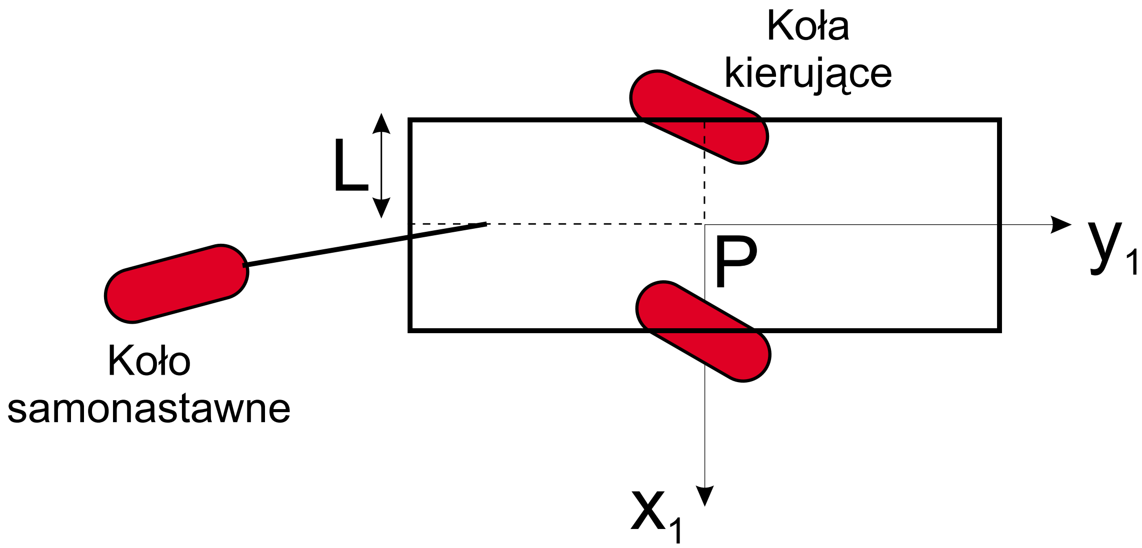
Macierze w równaniach więzów mają następującą postać:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos\beta_3 & \sin\beta_3 & L\cos\beta_3 \end{bmatrix}; J_2 = \mathrm{diag}(r)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_3 & -\cos\beta_3 & L\sin\beta_3 \end{bmatrix}; C_2 = 0$$

Typ (1, 2) – robot z dwoma kołami orientowalnymi względem środka (kierowalnymi), bez kół stałych.

koła	α	β	l
1c	0	-	L
2c	π	-	L
3oc	$\frac{3\pi}{2}$	-	L



Rys. 9: Robot z dwoma kołami kierującymi i jednym samonastawnym, $\delta_m = 1,\ \delta_s = 2$

Macierze w równaniach więzów mają następującą postać:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & L\cos\beta_1 \\ \sin\beta_2 & -\cos\beta_2 & L\cos\beta_2 \\ \cos\beta_3 & \sin\beta_3 & L\cos\beta_3 \end{bmatrix}; J_2 = \mathrm{diag}(r)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \sin\beta_1 & L\sin\beta_1 \\ -\cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & L\sin\beta_2 \\ \sin\beta_3 & -\cos\beta_3 & d + L\sin\beta_3 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Dla każdego typu robota wektor prędkości $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ należy do dystrybucji Δ_c zdefiniowanej jako

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \in \Delta_c \triangleq \mathrm{span}\left\{\mathrm{col} R^T(\theta)P(\beta_c)\right\} \tag{20}$$

co jest równoważne stwierdzeniu, że

$$\forall\ t\ \ \exists\ \boldsymbol{\eta}(t) \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = R^T(\theta)P(\beta_c)\boldsymbol{\eta} \tag{21}$$

Wymiar dystrybucji Δ_c, a stąd wektora $\boldsymbol{\eta}$ jest stopniem mobilności δ_m robota. Jeśli robot nie ma kół kierujących ($\delta_s = 0$) to macierz $P = const$. W przeciwnym przypadku macierz P zależy jawnie od kąta β_c i model kinematyki można przedstawić w postaci równań:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = R^T(\theta)P(\beta_c)\boldsymbol{\eta} \tag{22}$$

$$\dot{\beta}_c = \mu \tag{23}$$

Można te równania przedstawić w zwartej postaci

$$\dot{\boldsymbol{q}} = G(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u} \tag{24}$$

gdzie

$$\boldsymbol{q} \triangleq \boldsymbol{\xi},\ G(\boldsymbol{q}) \triangleq R^T(\theta)P,\ \boldsymbol{u} \triangleq \boldsymbol{\eta} \quad \text{gdy } \delta_s = 0$$

albo

$$\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \beta_c \end{bmatrix},\ G(\boldsymbol{q}) \triangleq \begin{bmatrix} R^T(\theta)P(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{gdy } \delta_s \geq 1$$

Modele kinematyki robotów kołowych

Typ	$\boldsymbol{q}$	$P(\beta_c)$ lub P	Równania kinematyki
(3,0)	$\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \end{matrix}$	$I_{3\times 3}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$
(2,0)	$\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c1} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} -\sin\beta_{c1} & 0 \\ \cos\beta_{c1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta+\beta_{c1}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta+\beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$
(1,1)	$\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c3} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ L\sin\beta_{c1} \\ \cos\beta_{c3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\sin\theta\sin\beta_{c3} & 0 \\ L\cos\theta\sin\beta_{c3} & 0 \\ \cos\beta_{c3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{matrix} x \\ y \\ \theta \\ \beta_{c1} \\ \beta_{c2} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} -2L\sin\beta_{c1}\sin\beta_{c2} \\ L\sin(\beta_{c1}+\beta_{c2}) \\ \sin(\beta_{c2}-\beta_{c1}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L[\sin\beta_{c1}\sin(\theta+\beta_{c2})+\sin\beta_{c2}\sin(\theta+\beta_{c1})] & 0 & 0 \\ -L[\sin\beta_{c1}\cos(\theta+\beta_{c2})+\sin\beta_{c2}\cos(\theta+\beta_{c1})] & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2}-\beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

Manewrowalność

Stopień manewrowalności:

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

Stopień mobilności δ_m jest równy liczbie stopni swobody robota, które są **bezpośrednio** sterowane z wejść $\boldsymbol{\eta}$ bez reorientacji kół kierowalnych. Określa liczbę „dostępnych w każdej chwili” stopni swobody robota. Stopień sterowności δ_s odpowiada stopniom swobody dostępnym za pomocą wejść $\boldsymbol{\mu}$. Działanie $\boldsymbol{\mu}$ na współrzędne $\boldsymbol{\xi}$ jest pośrednie przez współrzędne β_c, które są związane z wejściami $\boldsymbol{\mu}$ akcją całkującą.

Dwa roboty o tej samej wartości δ_M, ale z różnymi δ_m mają różne możliwości ruchowe. Dla robotów z $\delta_M = 3$ można dowolnie wybierać położenie chwilowego środka obrotu:

- dla typu (3,0) bezpośrednio z wejść $\boldsymbol{\eta}$,
- dla typów (2,1) i (1,2) przez orientację 1 lub 2 kół kierowalnych.

Dla robotów z $\delta_M = 2$ chwilowy środek obrotu musi leżeć na prostej pokrywającej się z osią obrotu koła stałego. Jego położenie na tej prostej można wybierać:

- dla typu (2,0) bezpośrednio z wejścia η,
- dla typów (1,1) przez orientację koła kierowalnego.

Ograniczenia na prędkości kątowe i obrotowe $\dot{\beta}_{oc}$ i $\dot{\varphi}$ bezpośrednio z równań (12) i (13):

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{oc} = \underbrace{-C_2^{-1} C_1(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_{oc})}_{D} R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \underbrace{-J_2 J_1(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_{oc})}_{E} R(\theta)\dot{\boldsymbol{\xi}} \tag{26}$$

Łącząc powyższe równania z modelem kinematyki (22) równania stanu dla β_{oc} i φ można zapisać

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\boldsymbol{\beta}_{oc})P(\boldsymbol{\beta}_c)\boldsymbol{\eta} \tag{27}$$

$$\dot{\varphi} = E(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_{oc})P(\boldsymbol{\beta}_c)\boldsymbol{\eta} \tag{28}$$

Definiując wektor współrzędnych konfiguracyjnych $\boldsymbol{q}$ jako

$$\boldsymbol{q} \triangleq [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_{oc}, \boldsymbol{\varphi}]^T \tag{29}$$

można zapisać konfiguracyjny model kinematyki w zwartej postaci

$$\dot{\boldsymbol{q}} = S(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u} \tag{30}$$

gdzie

$$S(\boldsymbol{q}) \triangleq \begin{bmatrix} R(\theta)P(\boldsymbol{\beta}_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\boldsymbol{\beta}_{oc})P(\boldsymbol{\beta}_c) & 0 \\ E(\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_{oc})P(\boldsymbol{\beta}_c) & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{u} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \tag{31}$$

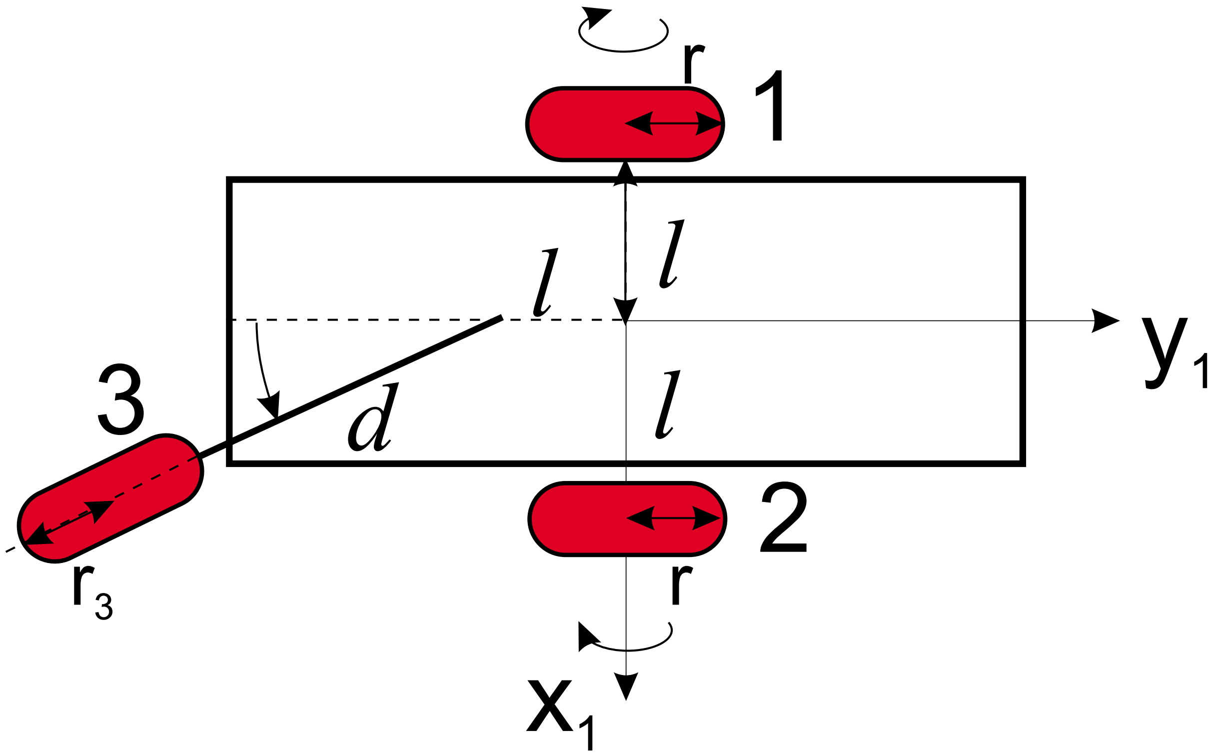
Przykład: Robot trójkołowy z dwoma kołami napędowymi i kołem swobodnym samonastawnym. Wektor współrzędnych konfiguracyjnych $\boldsymbol{q} = [x, y, \theta, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$, gdzie $\beta = \beta_{oc3}$

Ograniczenia fazowe (więzy ruchu):
Toczenie się bez poślizgu bocznego kół

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta & d + L\cos\beta \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \dot{\beta} = \mathbf{0} \tag{32}$$

Toczenie się bez poślizgu wzdłużnego

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & l \\ 0 & -1 & l \\ \cos\beta & \sin\beta & L\cos\beta \end{bmatrix} \boldsymbol{R}(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{33}$$



Rys. 10: Schemat kinematyczny robota trójkołowego, $\delta_m = 2$, $\delta_s = 0$

Konfiguracyjny model kinematyki określa macierz $S(\boldsymbol{q})$ w postaci

$$S(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d}\cos\beta & -(1+\frac{L}{d}\sin\beta) \\ -\frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ -\frac{1}{r_3}\sin\beta & -\frac{L}{r_3}\cos\beta \end{bmatrix}$$

z modelu wynika, że

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = -\frac{2L}{r}\dot{\theta}$$

co oznacza, że $\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2L}{r}\theta$ musi mieć stałą wartość wzdłuż każdej trajektorii spełniającej ograniczenia.

Równania ruchu dla robota z napędem synchronicznym

Robot z napędem synchronicznym – każde koło może być napędzane i kierowane (tzn. możliwa jest zmiana orientacji osi obrotu koła). Koła są sprzężone mechanicznie za pomocą skomplikowanych mechanizmów paskowych. Koła są skierowane w tym samym kierunku i poruszają się z tą samą prędkością. Typową konfiguracją jest układ trzech kół kierowanych umieszczonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego z cylindryczną platformą. Pozycję robota wektor opisuje wektor (x, y, θ). Zakłada się, że prędkość obrotowa $\omega(t)$ i liniowa $v(t)$ robota mogą być sterowane niezależnie. Ruch robota podlega następującym więzom nieholonomicznym: kierunek wektora prędkości liniowej $v(t)$ zawsze dąży do kierunku ruchu wyznaczonego przez θ. Współrzędne x, y i θ są opisane następującymi zależnościami:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\ \cos\theta(t)\, dt \tag{34}$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\ \sin\theta(t)\, dt \tag{35}$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt \tag{36}$$

Prędkość $v(t)$ zależy od $v(t_0)$ i przyspieszenia liniowego $\dot{v}(t)$ w przedziale $\tau \in [t_0,\ t]$. Podobnie, orientacja $\theta(t)$ jest zależna od orientacji początkowej $\theta(t_0)$ i prędkości początkowej $\omega(t_0)$ oraz przyspieszenia kątowego $\dot{\omega}(t)$ w przedziale $\tau \in [t_0,\ t]$. Podstawiając za $v(t)$ i $\theta(t)$ współrzędną x w chwili t_n można wyrazić jako funkcję stanu początkowego i przyspieszeń:

$$\begin{aligned} x(t_n) = {} & x(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} \left(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{v}(\tau)\, d\tau \right) \\ & \cdot \cos\left(\theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\omega(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \dot{\omega}(\tilde{t})\, d\tilde{t} \right)\, d\tau \right)\, dt \end{aligned} \tag{37}$$

Biorąc pod uwagę, że w cyfrowych układach sterowania w pojedynczym kroku dyskretyzacji wartość zadana prądu silnika jest stała, a przyspieszenie jest proporcjonalne do prądu można przyjąć: $\dot{v}(t) = const$ oraz $\dot{\omega}(t) = const$ dla $t \in [t_i,\ t_{i+1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Przy założeniu przedziałami stałych przyspieszeń równanie (37) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} x(t_n) = \ & x(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{+1}} \left(v(t_i) + \dot{v}_i\ \Delta_t^i \right) \\ & \cos\left(\theta(t_i) + \omega(t_i)\ \Delta_t^i + \tfrac{1}{2}\dot{\omega}_i\ (\Delta_t^i)^2 \right)\ dt \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie $\Delta_t^i = t - t_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dla uproszczenia równania (38) zakłada się, że prędkość na przedziale $[t_i,\ t_{i+1}]$ jest stała. Jeśli przedział jest dostatecznie mały, wówczas dzięki gładkości ruchu mamy

$$v(t_i) + \dot{v}_i\ \Delta_t^i \approx v_i,$$

gdzie v_i dowolna prędkość z przedziału $v_i \in [v(t_i),\ v(t_{i+1})]$ oraz

$$\theta(t_i) + \omega\Delta_t^i + \frac{1}{2}\dot{\omega}_i\ (\Delta_t^i)^2 \approx \theta(t_i) + \omega_i\Delta_t^i,$$

gdzie ω_i dowolna prędkość z przedziału $\omega_i \in [\omega(t_i),\ \omega(t_{i+1})]$. Stąd

$$x(t_n) = x(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{+1}} \dot{v}_i\ \cos\left(\theta(t_i) + \omega_i\ (\tau - t_i)\right)\ d\tau \tag{39}$$

Po scałkowaniu mamy

$$x(t_n) = x(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(F_x^i(t_{i+1}) \right) \tag{40}$$

gdzie

$$F_x^i(t) = \begin{cases} \frac{v_i}{\omega_i}\left[\sin\theta(t_i) - \sin(\theta(t_i) + \omega_i\ (t - t_i))\right], & \text{dla } \omega_i \neq 0 \\ v_i \cos(\theta(t_i)) \cdot t, & \text{dla } \omega_i = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Podobnie dla współrzędnej y

$$y(t_n) = y(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left(F_y^i(t_{i+1})\right) \tag{42}$$

gdzie

$$F_y^i(t) = \begin{cases} -\frac{v_i}{\omega_i}\left[\cos\theta(t_i) - \cos(\theta(t_i) + \omega_i\,(t - t_i))\right], & \text{dla } \omega_i \neq 0 \\ v_i \sin(\theta(t_i)) \cdot t, & \text{dla } \omega_i = 0 \end{cases} \tag{43}$$

Jeśli $\omega_i = 0$ robot porusza się po linii prostej, zaś gdy $\omega_i \neq 0$ po łuku okręgu

$$\left(F_x^i - M_x^i\right)^2 + \left(F_y^i - M_y^i\right)^2 = \left(\frac{v_i}{\omega_i}\right)^2 \tag{44}$$

gdzie

$$M_x^i = -\frac{v_i}{\omega_i}\, \sin\theta(t_i) \tag{45}$$

$$M_y^i = \frac{v_i}{\omega_i}\, \cos\theta(t_i) \tag{46}$$

Górne ograniczenia błędów aproksymacji:

$$E_x^i,\ E_x^i \leqslant |v(t_{i+1}) - v(t_i)|\, \Delta t_i$$