

Ostateczny dowód związku między średnim czasem życia izotopu a stałą rozpadu

ziem24

6 grudnia 2025r.

Streszczenie

Kiedy byłem w 4. klasie liceum, na fizyce omawialiśmy wzór połowicznego rozpadu. Ktoś zadał pytanie o to, skąd znamy związki między stałą rozpadu, średnim czasem życia, a czasem połowicznego rozpadu. Ponieważ coś tam umiałem, to wyprowadziłem je na tablicy i byłem z siebie zadowolony, dopóki nie padło pytanie o to skąd wiemy, że $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Tego nie potrafiłem wykazać, ale usłyszałem zdanie, że taka jest definicja. Po dwóch latach udało mi się udowodnić, że to nie jest definicja.

1 Wprowadzenie

Tematem zainteresowania jest funkcja $N : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Definiujemy $\lambda > 0$ jako stałą rozpadu, a N jako funkcję wiążącą czas t z liczbą cząstek w próbce, które nie rozpadły się po tym czasie. Początkowo ($t = 0$) jest ich dokładnie N_0 .

Potrzebujemy wprowadzić pewne pojęcia z dziedziny probabilistyki, które przydadzą nam się do obliczeń:

1.1 Zmienne losowe w modelu dyskretnym

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jednowymiarową zmienną losową nazwiemy funkcję $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 1. Rzucamy 2 razy monetą (orzeł - O, reszka - R). Powiedzmy, że jeśli wyrzucimy 2 orły, to otrzymujemy 5 zł, jeśli wyrzucimy 2 reszki - tracimy 3 zł, w pozostałych przypadkach tracimy 1 zł. Niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza wygraną pieniężną w złotych. Wtedy $\Omega = \{O, R\}^2$, a X opiszemy następująco:

$$X(\omega) = \begin{cases} 5, & \omega = (O, O) \\ -3, & \omega = (R, R) \\ -1, & \omega \in \{(O, R), (R, O)\} \end{cases}$$

Nośnikiem zmiennej losowej nazwiemy zbiór takich wartości, które są przyjmowane z dodatnim prawdopodobieństwem. Dla przykładu pierwszego mamy nośnik $S_X = \{-3, -1, 5\}$.

Niech $P(X = n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że zmienna X przyjmie wartość n . Dystrybuantą zmiennej losowej nazwiemy funkcję F_X spełniającą poniższy warunek:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{n \in S_X \mid n \leq t} P(X = n)$$

Uwaga: $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$. Jest to de facto stwierdzenie, że X zawsze przyjmie dowolną wartość rzeczywistą.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej to w dużym skrócie średnia wartość X uzyskana po wykonaniu bardzo dużej liczby doświadczeń. Można ją obliczyć ze wzoru na średnią ważoną, co powinno być w miarę oczywiste.

$$\mathbb{E}X = \sum_{n \in S_X} n \cdot P(X = n)$$

Dla przykładu 1 możemy policzyć:

$$\mathbb{E}X = \sum_{n \in \{-3, -1, 5\}} n \cdot P(X = n) = -3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

1.2 Zmienne losowe w modelu ciągłym

Model ciągły różni się od modelu dyskretnego tym, że mamy do czynienia z niepoliczalnie dużą Ω (uwaga: zbiór liczb naturalnych jest policzalny, zbiór liczb rzeczywistych nie).

Dystrybuantą jest funkcja $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będąca sumą wszystkich prawdopodobieństw $P(X = x)$, w skrócie całka.

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x P(X = x)$$

Nie jest to w żaden sposób przydatne, ponieważ jest to stwierdzenie, że zsumowanie niepoliczalnie wielu nieskończenie małych prawdopodobieństw da nam dystrybuantę. Zauważmy natomiast, że:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \lim_{h \rightarrow 0} P(X = x + h) - P(X = x) = \lim_{h \rightarrow 0} P(x \leq X \leq x + h) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [P(X \leq x + h) - P(X \leq x)] = \lim_{h \rightarrow 0} [F_X(x + h) - F_X(x)] \end{aligned}$$

a jednocześnie:

$$^1 f_X(x) := \frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_X(x + h) - F_X(x)}{h}$$

¹Tę funkcję nazywamy funkcją gęstości prawdopodobieństwa

Nielegalnym sposobem możemy otrzymać następującą równość:

$$P(X = x) = f_X(x) \, dx \quad (1)$$

O dystrybuancie wiemy, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$. Ponadto taka funkcja musi być co najmniej prawie wszędzie (czyli z wyłączeniem skończonej/policzalnej liczby punktów) prawostronnie ciągła. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest tak naprawdę pochodną dystrybuanty w punktach ciągłości F_X , dodatkowo jej całka oznaczona nad $\mathbb{R}$ jest równa 1, a sama funkcja jest prawie wszędzie nieujemna. Jeśli chcemy otrzymać wartość oczekiwaną zmiennej losowej w modelu ciągłym, musimy wykonać obliczenie analogiczne do tego z modelu dyskretnego.

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P(X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \, dx \quad (2)$$

2 Wyprowadzenie wartości na średni czas życia

Mamy naszą funkcję $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Mówi ona mniej więcej tyle, że po czasie t przetrwało N z N_0 cząstek. A zatem funkcja $e^{-\lambda t}$ jest prawdopodobieństwem, że cząstka nie rozpadła się po czasie t . Z tego dalej wynika, że $1 - e^{-\lambda t}$ to prawdopodobieństwo, że cząstka nie rozpadła się do momentu t . Jeśli przez T oznaczmy zmienną losową, której wynikiem jest czas, w którym dany izotop się rozpadł, możemy zdefiniować taką dystrybuantę i funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Te funkcje spełniają wszystkie warunki dystrybuanty i funkcji gęstości (dowód zostawiam czytelnikom). Średni czas życia τ to - co nie powinno nikogo zaskoczyć - wartość oczekiwana zmiennej losowej T .

$$\begin{aligned} \tau = \mathbb{E}T &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \, dt = \\ &= \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} \, dt \xrightarrow{u:=-\lambda t} \frac{1}{\lambda} \int_0^{-\infty} u e^u \, du = \\ &= \frac{-1}{\lambda} [u e^u - e^u]_0^{-\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lim_{u \rightarrow -\infty} (u e^u - e^u) - (u e^u - e^u)|_{u=0} \right] = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Mamy $\tau = \frac{1}{\lambda}$, co kończy dowód.

□